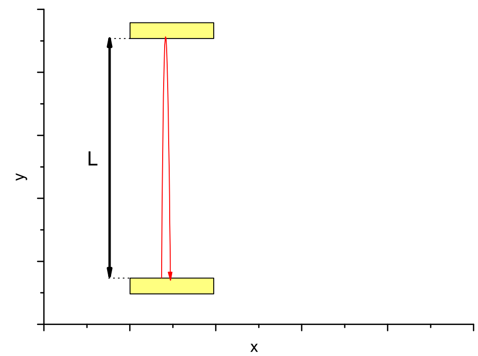
Et detaljeret supplement til *Tid — Den relative virkelighed*

Ulrik I. Uggerhøj, Institut for Fysik og Astronomi, Århus Universitet, Danmark

4. oktober 2006

1 Indledning

Som skrevet i prologen til [1], har jeg i bogen ikke gjort meget ud af matematisk at *bevise* de forunderlige fænomener, der bliver lagt frem. Dette dokument er ment som det supplement til bogen, der efter min mening bør kunne overbevise eventuelle kritiske læsere om, at postulaterne er velfunderede. Jeg vil tro, at en 3.g. gymnasie-elev på matematisk linje med den fornødne tålmodighed kan følge alle mine argumenter. For at lette læsningen har jeg taget så at sige alle mellemregninger med. God fornøjelse!



Figur 1: *Lysuret i hvile, se figur 7 i [1]. For at gøre både ud- og hjemturen synlige, er lysets ruter ikke tegnet sammenfaldende som de ellers bør være.*

2 Tidsforlængelse, længdeforkortning

2.1 Tidsforlængelse, lysuret

Et af den specielle relativitetsteoris kardinalpunkter er udsagnet, at 'et ur i bevægelse går langsomt'. I det følgende vil jeg vise dette fænomen og dets begrænsninger. I bogen spiller 'lysuret' — som introduceres på s. 49 — en central rolle. I denne note spiller lysuret ligeledes en central rolle — ja, faktisk har jeg forsøgt at vise alle de postulerede fænomener, udelukkende baseret på betragtninger vedrørende lysuret. Og inden vi går igang, vil jeg blot minde om at lysets hastighed c *altid* lokalt er den samme, uanset hvor hurtigt kilden bevæger sig, og uanset hvor hurtigt observatøren bevæger sig, se [1] s. 46.

I lysuret i hvile, se figur 1, er perioden den tid, det tager lyset at bevæge sig fra det ene spejl, hen til det andet og tilbage igen. Hvis afstanden mellem spejlene er givet som L, får man altså perioden

$$T_0 = \frac{2L}{c} \tag{1}$$

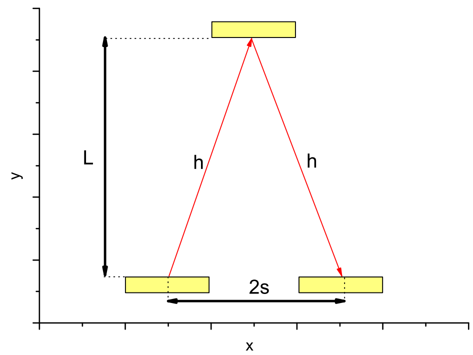
hvor indekset 0 viser (her og i det følgende), at der er tale om et instrument (ur eller målestok f.eks.) i hvile i forhold til observatøren. Der gælder også, at $L = L_0$ *på tværs* af en evt. bevægelsesretning af uret (ellers bryder Pythagoras sætning sammen i planen vinkelret på bevægelsesretningen). Nu sættes lysuret i bevægelse med hastigheden v langs x-aksen, se figur 2, og afstanden mellem det punkt, hvor lyset udsendes til det punkt, hvor det når tilbage til spejlet er

$$2s = v \cdot T \tag{2}$$

hvor perioden T er perioden målt med uret i bevægelse (det er jo det, der definerer, at pulsen er nået tilbage). Afstanden tilbagelagt af lyset langs de skrå hypotenuser, begge kaldet h, er

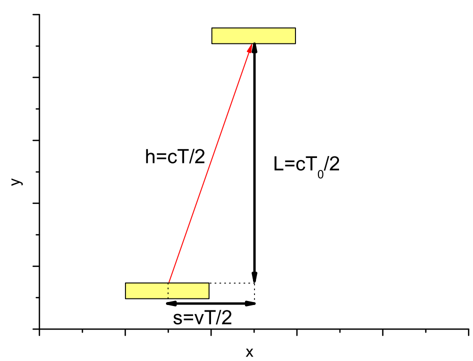
$$2h = c \cdot T \tag{3}$$

Her er det vigtigt, at lysets hastighed altid er den samme, så c i ligning (1) og i ligning (3) er den



Figur 2: *Lysuret i bevægelse (kun de 'aktive' spejle, dvs. spejlene til det tidspunkt hvor de bliver ramt, er vist), se figur 8 i [1].*

samme. Der vil nu være en retvinklet trekant med kateterne $\frac{vT}{2}$ (fra ligning (2)) og $\frac{cT_0}{2}$ (fra ligning (1)) og hypotenusen $\frac{cT}{2}$ (fra ligning (3)), se figur 3.



Figur 3: *Lysuret i bevægelse (kun den ene halvdel af de 'aktive' spejle set i figur 2 er vist).*

Af Pythagoras' sætning $s^2 + L^2 = h^2$ har man således

$$(\frac{vT}{2})^2 + (\frac{cT_0}{2})^2 = (\frac{cT}{2})^2 \qquad (4)$$

hvor kvadraterne kan udføres, og der ganges på begge sider med 4

$$v^2T^2 + c^2T_0^2 = c^2T^2 \qquad (5)$$

hvorefter vi samler led med hhv. T og T_0 ved at trække v^2T^2 fra på begge sider

$$c^2T_0^2 = c^2T^2 - v^2T^2 \qquad (6)$$

Nu kan vi dele begge sider med c^2

$$T_0^2 = T^2 - \frac{v^2}{c^2}T^2 \qquad (7)$$

sætte uden for parentes på højresiden

$$T_0^2 = T^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) \qquad (8)$$

dele med udtrykket i parentesen på begge sider og bytte højre- og venstresiden om

$$T^2 = T_0^2 \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (9)$$

og til sidst tage kvadratroden på begge sider

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (10)$$

Ligning (10) er det ønskede resultat — sammenhængen mellem perioden på et ur i hvile T_0 og et ur i bevægelse T.

Hvis v er meget tæt på c bliver $\frac{v^2}{c^2}$ meget tæt på 1. Trækker man et tal meget tæt på 1 fra 1 får man noget der er tæt på nul. Kvadratroden af et tal der er tæt på nul bliver lidt større, men er dog stadig tæt på nul, og 1 divideret med et tal tæt på nul er meget stort. Perioden af uret i bevægelse er altså meget større end perioden af uret i hvile eller med andre ord: **Et ur i bevægelse går langsomt!** For at tage et specifikt eksempel: Lad $v = 0.8c$ så fås $\frac{v^2}{c^2} = 0.64$, $1 - \frac{v^2}{c^2} = 0.36$, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.6$ og endelig $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 5/3$, så et ur med hastigheden 80% af lysets hastighed går langsomt med en faktor 1.67.

Hvis derimod $v \ll c$ får man fra ligning (10) at $T \simeq T_0$, så medmindre det ene ur bevæger sig med en hastighed sammenlignelig med lysets (eller man kan måle begge ures gang meget præcist) ser man ikke fænomenet. Det er derfor vi ikke ser det i dagligdagen.

De størrelser, der indgår i ligning (10), er så ofte brugt, at de har fået deres egne navne. Således benævnes faktoren, der relaterer T og T_0, med det græske bogstav 'gamma'

$$\boxed{T = \gamma T_0} \qquad (11)$$

hvor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12}$$

Ligeledes benytter man notationen, hvor hastigheden er angivet i forhold til lyshastigheden med det græske 'beta'

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}} \tag{13}$$

hvor altså β aldrig kan blive større end eller lig med 1 og ikke mindre end nul. I notationen med β ser ligning (12) således ud

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{14}$$

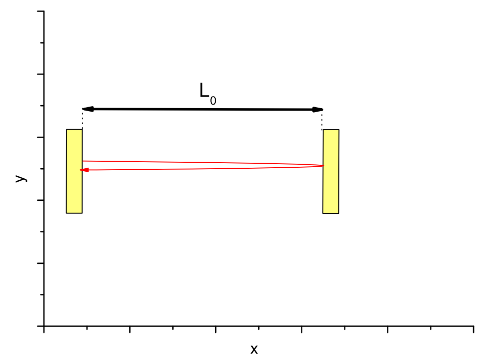
I taleksemplet ovenfor har vi $\beta = 0.8$ og $\gamma = 5/3$.

Nu vil du måske indvende, at jeg her kun har vist det for et ganske bestemt ur, nemlig lysuret. Hvad med dit armbåndsur eller dine hjerteslag? Jo, vi må være enige om, at to ure, der begge er i hvile skal gå ens, såfremt begge ure fungerer som et ur skal. Så dit armbåndsur går på samme måde som et lysur med en bestemt afstand mellem spejlene. Nu kan vi så sætte dig, dit armbåndsur og lysuret i jævn bevægelse i forhold til mig. Du vil ikke kunne detektere nogen forandring i urenes gang, når bevægelsen er jævn (se f.eks. 'relativitetsprincippet', Galilei-citatet i [1], s. 45), de vil altså gå synkront. Men hvis lysuret i bevægelse — set for mig — går langsomt, må dit armbåndsur, der også er i bevægelse, ligeledes gå langsomt set for mig, ellers er de ikke synkrone. Dit armbåndsur (og derfor *ethvert* andet ur, argumentet gælder et vilkårligt velfungerende ur) går altså langsomt, set for mig.

Et atom er på en måde et avanceret ur, hvori elektronens kredsen omkring atomkernen fungerer som viseren på et ur — en fast rotationshastighed omkring kernen (fra kvantefysikken ved vi at denne planetbane-analogi ikke er helt korrekt, men til dette formål fungerer den fint). Dette 'eksotiske' ur vil ifølge ræsonnementet ovenfor også gå langsomt, hvis det er sat i bevægelse. Elektronen roterer altså langsommere rundt om kernen (målt af den, der ikke bevæger sig med atomet/uret). Da molekylære processer i bund og grund er bestemt af elektronernes banehastighed, vil de molekylære processer, og dermed de biologiske processer, også gå langsomt. En person i bevægelse ældes altså lidt langsommere end en person i hvile (men da man altid er i hvile i forhold til sig selv, kan man ikke mærke eller måle det uden at sammenligne med andre). En mere udførlig diskussion af dette mærkelige fænomen findes i afsnittet om tvillingeparadokset og appendiks B i [1].

2.2 Længdeforkortning, lysuret roteret

Nu kan vi rotere lysuret i hvile fra figur 1 90° med uret, se figur 4. Igen er perioden den tid, det tager lyset at bevæge sig fra det ene spejl, hen til det andet og tilbage igen.



Figur 4: *Et roteret lysur i hvile, se figur 7 i [1].*

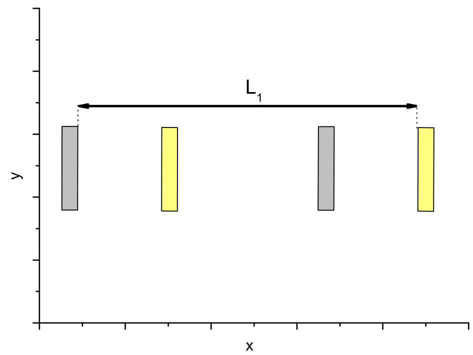
Men denne gang sætter vi lysuret i bevægelse langs lysets udbredelsesretning og ser i første omgang på, hvornår pulsen rammer spejlet til højre (som jo altså bevæger sig væk fra lyset), se figur 5.

Som i eksemplet ovenfor må spejlet - denne gang det til højre - blive ramt til et bestemt tidspunkt, lad os her kalde det T_1. I dette tidsrum har lysuret bevæget sig afstanden $x = v \cdot T_1$ mod højre, så den totale afstand lyset skal tilbagelægge i tidsrummet T_1, er altså urets længde L (der ikke nødvendigvis er den samme som urets længde i hvile L_0) plus afstanden $x = v \cdot T_1$:

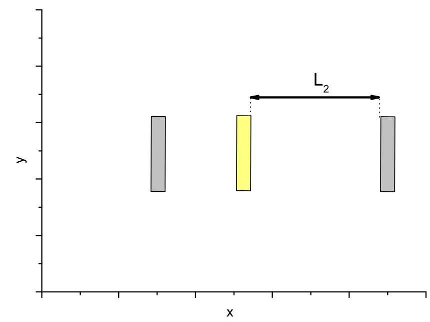
$$L_1 = L + v \cdot T_1 = c \cdot T_1 \tag{15}$$

hvoraf man får sammenhængen mellem L og T_1

$$L = (c-v) \cdot T_1 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{L}{c-v} \tag{16}$$



Figur 5: *Et roteret lysur i bevægelse langs lysets udbredelsesretning, se figur 9 i [1]. Med grå er vist spejlenes udgangspunkt (de gule spejle fra figur 4) og med gul spejlenes position til det tidspunkt T_1, hvor spejlet til højre bliver ramt af lyspulsen.*



Figur 6: *Et roteret lysur i bevægelse langs lysets udbredelsesretning, se figur 9 i [1]. Med grå er vist spejlenes udgangspunkt fra figur 5 og med gul spejlenes position til tidspunktet T, hvor spejlet til venstre bliver ramt af lyspulsen.*

og tilsvarende på tilbagevejen i tidsrummet T_2, hvor spejlet til venstre bevæger sig henimod lyset, se figur 6:

$$L_2 = L - v \cdot T_2 = c \cdot T_2 \tag{17}$$

hvoraf man får en sammenhæng mellem L og T_2

$$L = (c + v) \cdot T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = \frac{L}{c + v} \tag{18}$$

I afsnittet om Doppler-effekt vender vi tilbage til, hvorfor tiderne T_1 og T_2 ikke er ens.

En periode på uret i bevægelse T er altså summen af tiderne T_1 og T_2 fundet af ligningerne (16) og (18), dvs.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} \tag{19}$$

som kan omskrives ved at sætte L uden for parentesen til

$$T = L(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v}) \tag{20}$$

Brøkerne bringes på fælles brøkstreg (forlænges med hhv. $c + v$ og $c - v$) til

$$T = L(\frac{c + v + c - v}{(c - v)(c + v)}) \tag{21}$$

og det udnyttes, at to tals sum gange to tals differens er lig kvadratet på første led minus kvadratet på andet led

$$T = L(\frac{2c}{c^2 - v^2}) \tag{22}$$

eller ved at forkorte med c^2

$$T = \frac{2L}{c}(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}) \tag{23}$$

Nu udnytter vi ligning (10), der fortæller, at uret i bevægelse går langsomt

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$

således at

$$\frac{2L}{c}(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}) = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24}$$

der kan omskrives ved at gange med $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ på begge sider til

$$\frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_0 \tag{25}$$

I hvile må der gælde det ækvivalente til ligning (1):

$$T_0 = \frac{2L_0}{c} \tag{26}$$

der fører til

$$\frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2L_0}{c} \tag{27}$$

således at længden af lysuret i bevægelse bliver

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{28}$$

der er det korrekte udtryk for længdeforkortningen.

Med notationen fra ligning (12)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{12}$$

fås en mere kompakt beskrivelse af den ønskede sammenhæng mellem hvilelængden L_0 (længden af et ur eller en målestok, målt af en person i hvile i forhold til stokken) og længden af uret i bevægelse L:

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}} \tag{29}$$

Idet γ altid er større end (eller lig med, hvis $v = 0$) 1, er længden af uret i bevægelse L altså mindre end (eller lig med, hvis $v = 0$) hvilelængden L_0 — **længdeforkortning!**

2.3 Doppler-effekt uden relativitetsteori

Man kan let forledes til at tro, at har man vist, at et ur i bevægelse går langsomt, så har man vist en effekt fra relativitetsteorien. Det er en faldgrube, som selv erfarne videnskabspopularisatorer kan falde i [2].

Som forklaret i [1] side 91 og med figur 23, kender vi godt den klassiske Doppler-effekt, opdaget i 1842. Den indgår i lysurets opførsel på både ud- og hjemturen for lyspulsen, når uret bevæger sig i samme (eller modsatte) retning som lyset. Ser vi blot på den klassiske effekt, må vi kræve, at der ikke er forskel på ures gang (som jo er en relativistisk effekt), altså at $T = T_0$. Vi har også ligning (16), der siger, hvornår højre spejl bliver ramt

$$T_1 = \frac{L}{c-v} \tag{16}$$

For at se hvad effekten af, at spejlet bevæger sig væk fra lyset er, kan vi dele T_1 med $\frac{T}{2}$, som jo er den forventede værdi hvis spejlet var i hvile, og vi kan kalde forholdet for $\frac{T'}{T}$

$$\frac{T'}{T} = \frac{2T_1}{T} \tag{30}$$

Dette forhold udtrykker altså perioden af noget i bevægelse (ambulancesirenen f.eks.) delt med perioden af det stillestående, men foreløbigt uden hensyntagen til relativitetsteorien. Her benytter vi ligning (22)

$$T = \frac{2cL}{c^2-v^2} \tag{22}$$

som udtryk for T, hvorved vi får (ved at 'gange med den omvendte')

$$\frac{T'}{T} = 2\frac{L}{c-v}\cdot\frac{c^2-v^2}{2cL} \tag{31}$$

hvor vi igen udnytter reglen $c^2-v^2 = (c+v)(c-v)$, denne gang bare 'den anden vej', dvs.

$$T' = T\frac{c+v}{c} = T(1+\frac{v}{c}) \tag{32}$$

som er den klassiske regel for Doppler-skiftet af perioden. Når modtageren fjerner sig (hvad det højre spejl i figur 5 gør), bliver den relative periode større med en faktor $1+\frac{v}{c}$. Vi kunne udføre samme regning med T_2 og se, at når modtageren nærmer sig lyspulsen (hvad det venstre spejl i figur 6 gør), bliver den relative periode mindre med en faktor $1-\frac{v}{c}$.

2.4 Doppler effekt med relativitetsteori, nul observationsvinkel

Jeg har ovenfor skrevet udsagnet 'et ur i bevægelse går langsomt'. Det er — som så mange andre — en sandhed med modifikationer. For ganske vist går uret langsomt, men det er ikke sikkert, at det *ser ud* til at gå langsomt. Der er jo også noget der hedder Doppler-effekt.

I udledningen af ligning (32) tog vi udtrykkeligt *ikke* hensyn til, at T kunne være forskellig fra T_0. Det tager vi nu med i Doppler-effekten, og får derved det relativistiske udtryk for Doppler-effekten, dvs. i stedet for ligning (30) ser vi nu på

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{2T_1}{T_0} \tag{33}$$

Igen udnytter vi ligning (10), der fortæller, at uret i bevægelse går langsomt

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$

og vi omskriver forholdet $\frac{T'}{T_0}$ ved at gange med et 'specielt ettal': $1 = \frac{T}{T}$

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{T}{T_0} \tag{34}$$

og benytter ligningerne (32) (som første led i ligning (34)) og (10) (som andet led i ligning (34)) til at få

$$\frac{T'}{T_0} = (1-\frac{v}{c})\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{35}$$

Det er jo et relativt grimt udtryk, men benyttes β og γ kan det komprimeres betydeligt

$$\boxed{T' = \gamma(1-\beta)T_0} \tag{36}$$

Udover denne ret kompakte form kan ligning (35) omskrives med den regel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ vi har haft i brug nogle gange (husk at $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ altid gælder for positive tal, men at $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ kun undtagelsesvist er sandt, f.eks. hvis $a = 1$ og $b = 0$)

$$\sqrt{1-\frac{v}{c}}\sqrt{1+\frac{v}{c}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{37}$$

så vi benytter $\frac{(1-\frac{v}{c})}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = \sqrt{1-\frac{v}{c}}$ til at få et andet udtryk for det relativistiske Doppler-skift

$$\frac{T'}{T_0} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{38}$$

eller

$$\frac{T'}{T_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{39}$$

der blot udtrykker det samme som ligning (36), men på en anden måde.

2.5 Doppler-effekt med relativitetsteori, vilkårlig observationsvinkel

Nu stiger kunsten en anelse, idet dette afsnit behandler, hvordan tidens gang registreres på et ur i bevægelse i en vilkårlig retning, observeret under en vilkårlig vinkel. Man skulle umiddelbart tro, at det ville føre til et meget kompliceret udtryk, men det viser sig at være temmelig kompakt (i hvert fald når det udtrykkes som en funktion af β og γ). Her skal ligning (36) blot bruges, men i en form der tager hensyn til observationsvinklen θ:

$$T' = \gamma(1-\beta\cos(\theta))T_0 \tag{40}$$

Det er der jo ikke noget mærkeligt i — $\beta\cos(\theta)$ er jo hastighedskomponenten i observatørens retning. I udledningen af ligning (36) var denne hastighedskomponent *hele* hastigheden, hvad man også får af ligning (40), når observationsvinklen er 0°, dvs. $\cos(\theta) = 1$. Tilsvarende, når observationsvinklen er 90°, falder leddet $\beta\cos(\theta)$ bort, og vi har igen det oprindelige tilfælde med det langsomme ur, der hverken bevæger sig hen imod os eller væk fra os, ligning (10).

3 Lorentz-transformationer

Som skrevet i [1], er noget af det fundamentale i relativitetsteorien, at man ikke længere kan tale om tid for sig og rum for sig, men at man er tvunget til at behandle dem under et, som rumtid. Dette ser vi bl.a. af lysuret, idet dets bevægelse gennem rummet påvirker tidens gang. Det er altså nødvendigt at tale om 'begivenheder', som er de fire koordinater, der angiver tid *og* rum, i stedet for blot tid *eller* rum. I afsnittet om rumtidsintervallet argumenteres der yderligere for denne påstand. I dette afsnit skal vi derimod se, hvilke fire koordinater en person i bevægelse tilegner en begivenhed med fire *andre* koordinater tilegnet af en person i hvile. Denne omformning — eller 'transformation' af koordinater, benævnes i den tekniske jargon 'Lorentz-transformation'. I bogen [1] benyttes betegnelsen 'relativistisk rotation' for at påpege ligheden med en almindelig rotation, men der er tale om det samme som en Lorentz-transformation, blot udtrykt grafisk. Ikke overraskende skal vi igen benytte lysuret for at finde disse omformninger.

3.1 Lorentz-transformation af tid

Vi benytter det roterede lysur, se figur 4, og placerer en observatør, der hele tiden følger dette ur, også når vi lige om lidt sætter det i jævn bevægelse. Begivenheden 'urets start' giver vi naturligt koordinaterne $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ og begivenheden, at højre spejl bliver ramt

$$(x_0, y_0, z_0, t_0) = (L_0, 0, 0, \frac{T_0}{2}) \tag{41}$$

Nu sætter vi så lysuret i bevægelse som tidligere, se figur 5, men synkroniseret med et identisk ur (med tilhørende observatør), der forbliver i hvile. Synkroniseringen er simpelthen, at begge ure startes, når deres venstre spejl (hvorfra pulsen jo udgår) er ud for hinanden, dvs. for samme $x-$koordinat, nemlig nul. Hvordan ser begivenheden for observatøren i jævn bevægelse med uret (hvilesystemet, der hvor det observerede er i hvile), ligning (41), nu ud for observatøren der ser uret bevæge sig?

Ifølge udledningen af Doppler-effekten i relativitetsteorien (her ses bort fra observationsvinkel) er sammenhængen mellem $\frac{T'}{2}$ og $\frac{T_0}{2}$ givet som

$$\frac{T'}{2} = \gamma(1 - \beta)\frac{T_0}{2} \tag{36b}$$

men $\frac{T'}{2} = T_1$ er tiden, til hvilken spejlet til højre set i bevægelse bliver ramt, og den tilsvarende tid for den, der ser spejlet i hvile, er $\frac{T_0}{2}$. Vi ved også fra ligning (26)

$$\frac{T_0}{2} = \frac{L_0}{c} \tag{26b}$$

så vi kan omskrive ligning (36b) ved at gange ind i parentesen:

$$\frac{T'}{2} = \gamma(\frac{T_0}{2} - \beta\frac{T_0}{2}) \tag{36c}$$

og i sidste led indsættes ligning (26b), så vi får

$$\frac{T'}{2} = \gamma(\frac{T_0}{2} - \beta\frac{L_0}{c}) \tag{42}$$

Ligning 42 er den såkaldte Lorentz-transformation af tiden fra det ene system til det andet, der i mere generel form ser således ud:

$$\boxed{t = \gamma(t_0 - \beta\frac{x_0}{c})} \tag{43}$$

der viser, hvordan tidskoordinaten af begivenheden $(x_0, 0, 0, t_0)$ i det ene system ('hvilesystemet', dvs. der, hvor uret er i hvile) ser ud i det andet system $(x, 0, 0, t)$. I ligning (42) fik vi det korrekte udtryk ved at indsætte $\frac{L_0}{c}$ i stedet for $\frac{T_0}{2}$ i andet led, men ikke i første led. Det gjorde vi, fordi tidskoordinaten *nødvendigvis* må indgå på højresiden (hvad der udelukker, at vi kunne have lavet denne erstatning begge steder), og fordi den korrekte formel for at transformere fra det ene til det andet system uden hensyntagen til afstand er givet ved ligning (11): $T = \gamma T_0$, hvilket ligning (43) også giver for $x_0 = 0$.

3.2 Lorentz-transformation af rum

For at lave den fuldstændige Lorentz-transformation mangler vi at finde ud af, hvordan x_0 og x hænger sammen. Det er der mindst to metoder til at afgøre — en hurtig, og en mere grundig. Den hurtige er, at rum og tid i relativitetsteorien skal behandles på lige fod (evt. med et c ganget på eller divideret med, af hensyn til enhederne), så man kan kopiere ligning (43), bytte t ud med $\frac{x}{c}$ og x ud med ct og få den korrekte formel:

$$\boxed{x = \gamma(x_0 - \beta t_0 c)} \tag{44}$$

Den lidt mere grundige version er at se på, i hvilken afstand det bevægede spejl til højre bliver ramt, målt af den, der ser dette spejl i bevægelse. Vi ved jo, at denne afstand er L_0 for observatøren i hvile i forhold til det jævnt bevægede ur (se ligning (41)), men vi ved også fra figur 5, at denne afstand er $L_1 = c \cdot T_1$ i det andet system. Men $T_1 = \frac{T'}{2}$, $\frac{T_0}{2} = \frac{L_0}{c}$ og ligning (29) skal overholdes, når der ses bort fra tider, så fra ligning (42)

$$L_1 = cT_1 = c\frac{T'}{2} = \gamma(L_0 - \beta\frac{T_0 c}{2}) \qquad (45)$$

der er specialtilfældet af ligning (44).

3.3 Du er født på Månen

Nu har vi de nødvendige værktøjer — Lorentz transformationerne — til at se på de to mærkværdige rumtidsblandinger nævnt i [1]: 'Du er født på Månen' (s. 61) og 'Den Andromedanske morgenmad' (s. 66).

I førstnævnte tilfælde er der tale om to begivenheder, min fødsel (x,t) = (Skanderborg, 30.04.1968 kl. 16) og Armstrongs fodaftryk (x,t) = (Mare Tranquilitatis, 21.7.1969 kl. 10). Sættes sidstnævnte som i [1] til at være udgangspunktet (x,t) = (0,0), bliver førstnævnte flyttet til (x_0,t_0) = (384.000 km, -446.25 dage), og spørgsmålet er, om vi kan benytte ligning (44) til at opnå, at der findes en observatør, der ser begivenheden i (x_0,t_0) som foregående i $(0,t)$, hvor t kan være vilkårlig. Rum-koordinaten skal jo være nul for at være sammenfaldende med Mare Tranquilitatis, der blev valgt som udgangspunkt. Vi skal altså løse ligningen

$$0 = \gamma(x_0 - \beta t_0 c) \qquad (46)$$

som blev gjort grafisk i figur 14 i [1]. Vi husker, at både β og γ er entydigt givet ved hastigheden og lysets hastighed, så der er kun en ubekendt — ligningen kan altså løses. Det er ovenikøbet ikke så svært, idet γ ikke kan være nul, så ligningen løses, hvis $x_0 - \beta t_0 c = 0$ eller $\beta = \frac{x_0}{t_0 c}$ dvs. $v = \frac{x_0}{t_0} = -36$ km/t.

3.4 Den Andromedanske morgenmad

I dette eksempel betragtes to personer, der går forbi hinanden med en indbyrdes hastighed på 3 meter i sekundet. Spørgsmålet er, om deres 'nu'er et andet sted, er de samme, f.eks. i Andromedagalaksen. Den ene persons 'nu' i Andromeda er (x_0,t_0) = (Andromeda,0) og den andens (x,t) = (Andromeda,0) og lad os som tidligere sætte hastigheden af førstnævnte til nul og sidstnævntes hastighed v til 3 m/s, dvs. $\beta = \frac{v}{c} = \frac{3}{3\cdot 10^8} = 10^{-8}$. Afstanden (den nyligt opdaterede) til Andromeda x_0 er 2.5 mio. lysår. Vi benytter nu ligning (43) til at finde ud af, hvilken tid den førstes 'nu' svarer til i den andens referencesystem, dvs. tiden $t = \gamma(t_0 - \beta\frac{x_0}{c})$. Den første faktor, γ, er *meget* tæt på at være 1, så dens præcise størrelse er irrelevant her (det kan du evt. selv checke). Det afgørende bliver således $\beta\frac{x_0}{c} = 10^{-8} \cdot 2.5 \cdot 10^6 = 2.5 \cdot 10^{-2}$ hvor enheden bliver år, da vi regner afstanden i lysår og deler med lyshastigheden ($c = 1$ lysår/år, pr. definition, dvs. 1 år=1 lysår/c). Da der er $365 \cdot 24$ timer pr. år, bliver resultatet i timer altså $2.5 \cdot 10^{-2} \cdot 365 \cdot 24 = 219$, eller lidt mere end 9 dage.

4 Rumtidsintervallet

Som vist i bogens appendiks B [1], er rumtidsintervallet mellem to begivenheder, hvorimellem der er sendt et lyssignal, det samme, uanset hvem der beskriver det. I samme forbindelse postulerede jeg, at det gælder helt generelt. Med Lorentz-transformationerne er det relativt let at vise dette (men der er en del udregninger og du kan i stedet vælge at tro på det og hoppe videre til næste afsnit).

Rumtidsintervallet s er defineret (i min notation, det varierer lidt) ud fra

$$\boxed{s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2} \tag{47}$$

hvor koordinaterne her betegner afstande (i rum hhv. tid) — en slags udvidet Pythagoras' sætning. I bogen har jeg gjort en del ud af at argumentere for minustegnet. Lad os nu se på rumtidsintervallet mellem begivenhederne $(x_0, t_0) = (0, 0)$ og noget, der sker lidt senere, men samme sted i dette referencesystem $(x_1, t_1) = (0, T_0)$. Det kan jo ikke være et lyssignal, der adskiller dem, da lyset ikke kan stå stille. I det stillestående system får vi resultatet

$$s_0^2 = -c^2T_0^2 \tag{48}$$

I et referencesystem med hastigheden $v = \beta c$ benytter vi $x = \gamma(x_0 - \beta t_0 c)$ (ligning (44)) og $t = \gamma(t_0 - \beta\frac{x_0}{c})$ (ligning (43)) til at finde koordinaterne for de to begivenheder $(0, 0)$ og $(0, T_0)$. Svarene bliver hhv. $(0, 0)$ og $(\gamma(-\beta T_0 c), \gamma(T_0))$ hvoraf vi kan udregne

$$s^2 = \gamma^2\beta^2T_0^2c^2 - \gamma^2T_0^2c^2 \tag{49}$$

Her kan man sætte $\gamma^2T_0^2c^2$ uden for parentesen og få

$$s^2 = \gamma^2T_0^2c^2(\beta^2 - 1) \tag{50}$$

og da $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$ fås slutteligt

$$s^2 = -c^2T_0^2 \tag{51}$$

som er lig s_0^2 i ligning (48), hvilket skulle vises. For de to nævnte begivenheder er rumtidsintervallet altså uafhængigt af, hvem der beskriver det.

Men gælder det helt generelt? Ja, det gør det, hvilket man kan se af transformationen af et helt generelt punkt

$$(x_0, t_0) = (X_0, T_0) \tag{52}$$

som i det andet system har koordinaterne

$$(x, t) = (\gamma(X_0 - \beta T_0 c), \gamma(T_0 - \beta\frac{X_0}{c})) \tag{53}$$

som fremkommer ved at benytte formlerne for Lorentz-transformationer, ligning (43) og (44). For disse punkter gælder

$$s^2 = \gamma^2(X_0 - \beta T_0 c)^2 - c^2\gamma^2(T_0 - \beta\frac{X_0}{c})^2 \tag{54}$$

hvor vi kan udføre kvadraterne og sætte γ^2 udenfor parentes

$$s^2 = \gamma^2[-2X_0\beta T_0 c + X_0^2 + \beta^2T_0^2c^2 + 2X_0\beta T_0 c - c^2T_0^2 - \frac{c^2\beta^2X_0^2}{c^2}] \tag{55}$$

'krydsleddene' summerer til nul og vi kan sætte X_0^2 og $c^2T_0^2$ udenfor parenteser

$$s^2 = \gamma^2[X_0^2(1-\beta^2) - c^2T_0^2(1-\beta^2)] = X_0^2 - c^2T_0^2 = s_0^2 \tag{56}$$

idet $\gamma^2 = \frac{1}{(1-\beta^2)}$ eller kort sagt $s^2 = s_0^2$.

5 Einsteins kasse

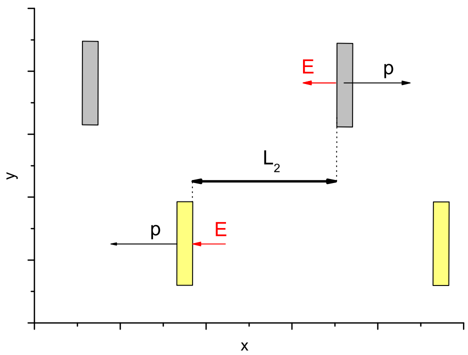
Et af de mest fantastiske resultater i den specielle relativitetsteori er, at masse er en form for energi og omvendt, $E = mc^2$. Som diskuteret i [1], s. 87, har Einstein selv vist resultatet på flere måder, heraf en kendt som 'Einsteins kasse'. Der er imidlertid næsten ingen forskel på Einsteins kasse og lysuret, så vi benytter her sidstnævnte.

Den fundamentale observation (kaldet 'massemidtpunktssætningen') er, at et tyngdepunkt ikke kan flytte sig uden en påvirkning gennem ydre kræfter. Allerede i begyndelsen af 1870erne viste Maxwell, at udsendelse af stråling med energien E medfører en overført impuls p givet ved

$$p = \frac{E}{c} \tag{57}$$

— der oprinder fra det såkaldte 'strålingstryk'. Lad dig ikke forvirre af, at ligning (57) ikke er et tryk med enhed kraft pr. areal. Forbindelsen til strålingstrykket P er $\Delta p = A \cdot P \cdot \Delta t$, hvor A er arealet, impulsændringen Δp og Δt er det tidsrum strålingstrykket virker i.

Når lysuret, der i begyndelsessituationen er i hvile, udsender lyspulsen med energien E, rekylerer



Figur 7: *Et roteret lysur i hvile (med grå), udsender en lyspuls med energien E fra det højre spejl mod venstre, og rekylerer som følge af impulsen p. Efter et tidsrum T_2 rammer lyspulsen det venstre spejl (med gul), og bringer som følge af impulsen p lysuret til standsning. Lyspulsen har i forløbet flyttet sig afstanden L_2.*

det i den modsatte retning pga. den overførte impuls p. Forløbet er vist på figur 7, og ligheden med figur 6 er tydelig.

Ifølge ligningerne (17) og (18) flytter lyspulsen sig afstanden

$$L_2 = \frac{L}{1 + \frac{v}{c}} \tag{58}$$

i tidsrummet

$$T_2 = \frac{L}{c + v} \tag{59}$$

Hvis lysuret har massen M, betyder impulsændringen en hastighed

$$v = \frac{p}{M} \tag{60}$$

så lysuret flytter sig

$$L_M = \frac{L}{c + v} v \tag{61}$$

den anden vej. Hvis tyngdepunktet skal ligge stille (og det skal det, der er ingen ydre kræfter), må vi kræve

$$M L_M = m_e L_2 \tag{62}$$

hvor m_e er den til strålingsenergien ækvivalente masse. Vi kan nu finde m_e ud fra

$$m_e = M \frac{L_M}{L_2} = M \frac{L}{c + v} v \frac{1 + \frac{v}{c}}{L} = M \frac{v}{c} \tag{63}$$

eller ved hjælp af ligning (60)

$$m_e = \frac{p}{v} \frac{v}{c} = \frac{E}{c} \frac{1}{c} = \frac{E}{c^2} \tag{64}$$

hvorfra man ser den berømte relation

$$\boxed{E = mc^2} \tag{65}$$

Energi er altså en form for masse og omvendt. Jeg har i det ovenstående benyttet m_e for at pointere at der i dette tilfælde er tale om en ækvivalent masse. Lys (fotoner) har ingen masse, men de har i kraft af deres energi en *ækvivalent* masse.

6 Masse, energi og impuls

Ganske som ovenfor vist for s^2 i tilfældet med rum og tid, ligning (47), eksisterer der en parameter der ikke afhænger af hvem der beskriver den i tilfældet med totalenergi E og impuls p. Den ønskede parameter er m_0 og sammenhængen er

$$\boxed{m_0^2 = (E^2 - p^2c^2)\frac{1}{c^4}} \tag{66}$$

hvor m_0 kaldes hvilemassen, dvs. den masse man måler i det system hvori den målte partikel er i hvile. Det er jo ikke så mærkeligt at denne størrelse er den samme altid, der refereres jo til et bestemt system hvori massen er i hvile, og dette system er det samme for alle, uanset bevægelse. Analogien til s^2 er måske endnu mere klar hvis man tænker på egentid τ som fås fra $\tau^2 = \frac{-s^2}{c^2}$, dvs. fra ligning (47) med $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\boxed{\tau^2 = (c^2t^2 - r^2)\frac{1}{c^2}} \tag{67}$$

Egentiden er jo netop defineret på samme måde med reference til hvilesystemet, se appendiks B i [1]. Det er altså nærliggende (men ikke *bevist* her) at hvis tider ændres som vist i ligning (11), og egentiden og hvilemassen er defineret på samme måde, så transformerer masser på samme måde som tider, dvs.

$$\boxed{m = \gamma m_0} \tag{68}$$

Objekter bliver altså tungere, jo hurtigere de bevæger sig idet γ vokser. Udtrykket $m = \gamma m_0$ definerer 'den relativistiske masse' m. Udover argumentet anført ovenfor om ligheden mellem definitionerne af egentid og hvilemasse, kan man betragte specialtilfældet fotoner, dvs. lyspartikler. For fotoner er *både* egentiden og hvilemassen nul. Også her er der altså en besnærende sammenhæng mellem m_0 og τ - partikler uden hvilemasse 'mærker' ikke tidens gang. Det er af samme grund at afstanden mellem Solen og Jorden set for dem bliver nul - de tilbagelægger nul afstand i løbet af nul egentid, se diskussionen i [1] s. 90.

Men hvilket udtryk skal man bruge for totalenergien E og impulsen p i relativitetsteorien? Jeg postulerer her — foranlediget af analogien mellem τ og m_0 der førte til ligning (68) — de korrekte udtryk, og vil i det følgende argumentere yderligere for hvorfor de ser ud som de gør:

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2} \tag{69}$$

$$\boxed{p = \gamma m_0 v} \tag{70}$$

I disse ligninger har jeg simpelthen erstattet m med γm_0 i ligning (65) og i den vanlige $p = mv$. Dette beviser ikke at det er korrekt, men det passer med ligning (66) (som du måske selv kan vise?) og vi kan nu se om udtrykkene passer i det tilfælde vi er vant til, $v \ll c$. Her får vi brug for en såkaldt 'rækkeudvikling' af kvadratroden og den inverse funktion, dvs. tilnærmelser til de sande værdier for de to funktioner. Der gælder approksimationen

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x \tag{r1}$$

hvis x er numerisk meget mindre end 1 og tilsvarende gælder approksimationerne

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x \tag{r2}$$

og

$$(1+x)^2 \simeq 1 + 2x \tag{r3}$$

hvis x er lille (prøv med en lommeregner om ikke de er korrekte, jo mindre x er numerisk, jo bedre passer det). Idet $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ kan vi for $v \ll c$, i.e. $\frac{v}{c} \ll 1$ benytte regel (r1) til at få en tilnærmelse $\gamma \simeq \frac{1}{1-\frac{v^2}{2c^2}}$ og regel (r2) til yderligere $\gamma \simeq \gamma_t = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$ hvor indeks t på γ_t betyder den tilnærmede værdi.

Lad os nu se på den tilnærmede energi $E_t = \gamma_t m_0 c^2$. Vi ganger ind i parentesen $E_t = m_0c^2(1 + \frac{v^2}{2c^2}) = m_0c^2 + \frac{1}{2}mv^2$ hvilket, bortset fra det første led m_0c^2, er den vanlige kinetiske energi $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$. Totalenergien (og det var derfor jeg insisterede på at kalde den det) er altså en sum af 'hvileenergien' m_0c^2 og den kinetiske energi E_{kin}

$$\boxed{E = E_{\text{kin}} + m_0c^2} \tag{71}$$

Kombinerer vi nu med ligning (69) får man ved at trække m_0c^2 fra på begge sider og sætte udenfor parantes

$$\boxed{E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)m_0c^2} \tag{72}$$

Hvad sker der ifølge denne ligning, når man tildeler en partikel kinetisk energi? I begyndelsen, dvs. for hastigheder der er små nok til at man kan ignorere relativitetsteorien, vokser hastigheden udfra den vanlige sammenhæng med den kinetiske energi $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_0v^2$, dvs.

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_0}} \tag{73}$$

Men det kan jo ikke fortsætte sådan i det uendelige, c er jo den største hastighed overhovedet og ligning (73) kender ingen grænser. Når relativistiske effekter får betydning, skal vi benytte ligning (72) til at finde hastigheden

$$E_{\text{kin}} = (\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1)m_0c^2 \tag{74}$$

Vi deler ligning (74) med m_0c^2 på begge sider, lægger 1 til på begge sider og 'kvadrerer', dvs. ganger henholdsvis højre- og venstresiden med sig selv:

$$(\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2} + 1)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{75}$$

Nu ganger vi begge sider med $1-\frac{v^2}{c^2}$ og deler begge sider med $(\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}+1)^2$ og får

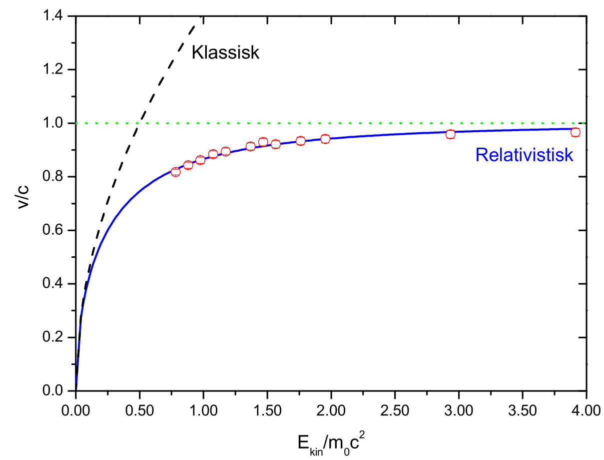
$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{(\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}+1)^2} \tag{76}$$

hvorefter vi trækker 1 fra på begge sider, ganger med -1, tager kvadratroden og ganger på begge sider med c

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}+1)^2}} \tag{77}$$

Sammen med en bachelorstudent, Mikkel Lund, har jeg udført målinger — vist med rødt i figur 8 og 9 — for at bekræfte at ligning (77) er det korrekte udtryk. I disse målinger har vi simpelthen fundet hastigheden ved at dele den tilbagelagte vejlængde mellem to detektorer med den tid elektronen har taget om at komme fra den ene til den anden. Der er ingen tvivl — hastigheden nærmer sig c, men overstiger den aldrig og det klassiske udtryk er helt håbløst for tilpas høje kinetiske energier.

Ligning (77) er altså det korrekte udtryk for hastigheden som funktion af den kinetiske energi,



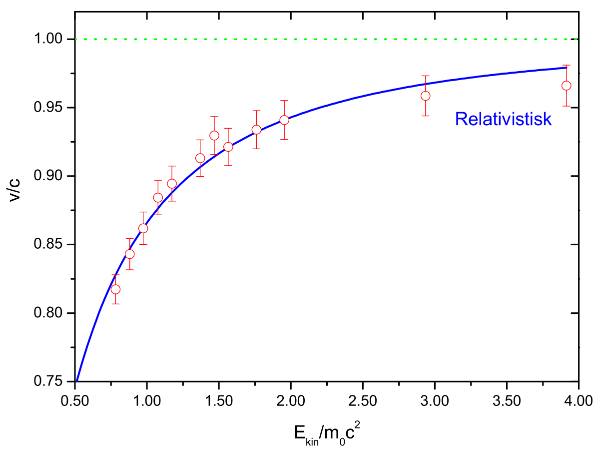
Figur 8: *Hastigheden i enheder af lysets hastighed* $\frac{v}{c}$ *som funktion af den kinetiske energi i enheder af hvilemassens energi* $\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}$. *Den fuldt optrukne linie viser det relativistiske udtryk, ligning (77), den stiplede viser det klassiske udtryk, ligning (73) og den vandrette linie viser* $v = c$. *Målte punkter med usikkerhedsfaner er vist med rødt.*

uanset størrelsen af den kinetiske energi. Du kan benytte regel (r3) og regel (r2) til at vise at hvis $\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}$ er lille, fås ligning (73). Hvad nu hvis $\frac{E_{\text{kin}}}{m_0c^2}$ er meget stor i ligning (77)? Så får man en hastighed der nærmer sig c, men lysets hastighed overskrides aldrig, se figur 8. Hvor bliver den kinetiske energi så af? Den bliver til relativistisk masse ifølge ligning (68). Så masse *er* en form for energi.

Litteratur

[1] Ulrik Uggerhøj: *Tid — den relative virkelighed*, Aarhus Universitetsforlag, Specialudgave 2006; ISBN 87 7934 280 9

[2] T. Nørretranders: *Einstein, Einstein*, Politikens Forlag 2005, s. 50f.



Figur 9: *Figuren viser et mindre udsnit af figur 8.*