

Anvendelse af Rindler-koordinater til at lette forståelsen af gravitationelle og kvantemekaniske aspekter af sorte huller

– et formidlingsprojekt i relativitetsteori



Speciale i Fysik

Christian Kirk

20116360

Vejleder: Ulrik I. Uggerhøj

Institut for Fysik og Astronomi
Aarhus Universitet
Juni 2017

Resumé

I dette speciale forklares gravitationelle og kvantemekaniske aspekter af sorte huller ud fra den specielle relativitetsteori og ækvivalensprincippet. Der arbejdes med acceleration i den specielle relativitetsteori, og her udledes egenaccelerationen givet ved $\alpha = \gamma^3 a$, der er den acceleration en observatør oplever i sit hvilesystem. Ligeledes udledes Rindler-koordinaterne for at beskrive en observatør, der undergår konstant egenacceleration. Der introduceres begivenhedshorisonter i den specielle relativitetsteori, Rindler-horisonten, og den tydeliggøres grafisk i form af Rindler-kilen ved at betragte kommunikationen mellem en accelererende observatør og en frakoblet observatør. Vha. ækvivalensprincippet forklares, at der ligeledes eksisterer begivenhedshorisonter i et tyngdefelt kaldet Schwarzschild-horisonten givet ved $r = 2GM/c^2$. I forlængelse af det arbejdes der med analogien mellem Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten på baggrund af ækvivalensprincippet.

Det vises, at Schwarzschild-metrikken nær horisonten har samme form som Rindler-metrikken, hvilket netop underbygger brugen af Rindler-koordinater og Rindler-kilen som udgangspunkt for at forklare sorte huller. For at forklare et sort huls gravitationelle singularitet ved $r = 0$ introduceres Kruskal-koordinaterne og Kruskal-diagrammet, der grafisk afbildes på samme måde som Rindler-kilen, men med den forskel at den også kan forklare singulariteten $r = 0$. På den måde opnås en komplet forståelse af singulariteterne for et sort hul beskrevet ved Schwarzschild-metrikken og disses fysiske fortolkninger.

Ydermere studeres kvantemekaniske effekter i form af Unruh-stråling, der postulerer, at en Rindler-observatør i Minkowski-vakuüm observerer et termisk spektrum af partikler. Igen bruges ækvivalensprincippet til at bygge bro til Hawking-stråling, der postulerer, at sorte huller udsender stråling med Hawking temperaturen $T = \hbar c^3 / 8\pi GM k_B$ ved horisonten.

Abstract

In this thesis the gravitational and quantum mechanical aspects of black holes are explained based on the special theory of relativity and the equivalence principle. Acceleration in special relativity is studied and the proper acceleration given by $\alpha = \gamma^3 a$ is derived, which is the acceleration that an observer experiences in his rest frame. Also, the Rindler coordinates are derived to describe an observer who undergoes constant proper acceleration. Event horizons in special relativity, the so called Rindler horizon, is introduced and it is illustrated graphically in terms of the Rindler wedge by looking at the communication between an accelerating observer and an disconnected observer. By using the equivalence principle, it is explained how event horizons also arise in a gravitational field, called the Schwarzschild horizon, which is given by $r = 2GM/c^2$. In connection with this the analogy between the Rindler and Schwarzschild horizon is studied via the equivalence principle.

It is shown that the Schwarzschild metric near the horizon has the same form as the Rindler metric, which supports the usage of Rindler coordinates and the Rindler wedge as a way of explaining black holes. In order to explain the gravitational singularity of black holes at $r = 0$, the Kruskal coordinates and Kruskal diagram is introduced which graphically is plotted in the same manor as the Rindler wedge but with the difference that the Kruskal diagram can explain the singularity at $r = 0$. In this way a complete understanding of the singularities of a black hole described by the Schwarzschild metric is achieved and the physical interpretation of these singularities.

Furthermore the quantum mechanical aspects in terms of Unruh radiation is studied which postulates that a Rindler observer in Minkowski vacuum observes a thermal spectrum of particles. Again the equivalence principle is used to make the connection to Hawking radiation, which postulates that black holes radiates near the horizon with the Hawking temperature $T = \hbar c^3 / 8\pi GM k_B$.

Indhold

1	Indledning og pædagogisk strategi	1
I	Fundamentet	5
2	Acceleration i den specielle relativitetsteori	7
2.1	Fire-vektorer og rumtidsintervallet	7
2.2	Fire-hastighed	11
2.3	Fire-acceleration	12
3	Rindler-koordinater	15
3.1	Udledning af koordinaterne	15
3.2	Rindler-kilen	20
3.2.1	Singulariteter	22
3.3	Rindler-horisonten	24
4	Tilpasning til gymnasieniveau	27
4.1	Bevægelse under konstant kraft	27
4.1.1	Ikke-relativistisk	27
4.1.2	Relativistisk	28
II	Gravitationelle aspekter	31
5	Ækvivalensprincippet	33
5.1	Det svage og det stærke ækvivalensprincip	33
5.2	Rummets krumning og Einsteins feltligninger	37
5.3	Gravitationel rødforskydning og tidsforlængelse	39
6	Sorte huller	43
6.1	Schwarzschild-radius	43
6.2	Schwarzschild-horisonten	45
7	Svagfelts-approksimation til den generelle relativitetsteori	49
8	Schwarzschild-metrikken	53
8.1	Tidsforlængelse og rødforskydning igen	55
8.2	Nær-horisont-approksimationen	56
9	Kruskal-koordinater	59

9.1	Relation til Schwarzschild-koordinater	59
9.2	Koordinat- og gravitationelle singulariteter	61
9.3	Den maksimalt udvidede Schwarzschild-løsning	64
III Kvantemekaniske aspekter		67
10	Hawking-effekten	69
10.1	Kvantefeltteori i Minkowski-rummet	69
10.2	Kvantefeltteori i en krum rumtid	74
10.3	Rindler-koordinater igen	76
10.4	Kvantefeltteori i Rindler-rummet og Unruh-effekten	78
10.5	Hawking-effekten	80
11	Konklusion	85
A	Schwarzschild-løsningen	87
B	Kruskal-koordinater	89
	Litteratur	93

Kapitel 1

Indledning og pædagogisk strategi

Formålet med specialet er at lette forståelsen af gravitationelle og kvantemekaniske aspekter af sorte huller. Sorte huller er et område af rumtiden, hvor tyngdekraften er så stærk, at end ikke lys kan undslippe. Denne afgrænsning i rumtiden, hvorfra lyset ikke kan undslippe, kaldes Schwarzschild-horisonten. Faktisk kan sorte huller spores helt tilbage til 1783, hvor den engelske naturfilosof John Michell i en artikel beskrev sorte huller (eller “mørke stjerner” som han kaldte dem), hvorfra lyset ikke kan undslippe [13]. Dette blev udregnet på baggrund af Newtonsk fysik, hvor han antog, at lys består af små partikler, der, når de udsendes fra en stjerne, vil blive bremsset grundet stjernens tyngdepåvirkning på partiklerne. Hvis stjernens tyngdepåvirkning er så stærk, at den overskrider undvigelseshastigheden for lys, vil lyset dermed ikke kunne undslippe, og stjernen vil ikke kunne ses. Michell tog det et skridt videre og forklarede, at selvom man ikke ville kunne se “mørke stjerner”, vil man alligevel kunne detektere dem indirekte, ved at undersøge måden hvorpå de “mørke stjerner” gravitationelt påvirker omkringliggende stjerner. Hvis man f.eks. observerer et stjernesystem, der rent gravitationelt opfører sig som to stjerner, men hvor kun én stjerne kan detekteres, ville det være indirekte evidens for en “mørk stjerne”. Faktisk er det med lignende metoder, at man nu om dage har observeret, at der i midten af vores Mælkevej sandsynligvis findes et sort hul, nemlig ved at kigge på de omkringliggende stjernes baner omkring centrum, se f.eks. kapitel 13.2 i [8].

Kimen til forståelsen af sorte huller med udgangspunkt i Einsteins generelle relativitetsteori blev lagt i 1916, da den tyske fysiker Karl Schwarzschild udgav en artikel, hvor han løste Einsteins feltligninger eksakt for tyngdefeltet udenfor en ikke-roterende, ikke-ladet sfærisk symmetrisk massefordeling [20]. Dengang var et sort hul dog kun en matematisk detalje, en såkaldt singularitet i løsningen, hvor den ikke var veldefineret. Fortolkning af et sort hul, som et område af rumtiden hvorfra intet kan undslippe, blev første gang givet en del år senere af David Finkelstein i 1958 [6].

I populærvidenskabelige sammenhænge har sorte huller altid haft stor interesse, grundet begivenhedshorisontens sælsomme karakter og andre relativistiske effekter ved sorte huller såsom tidsrejser og ormehuller. Især i Science Fiction film optræder sorte huller tit, f.eks. i filmen *Interstellar* fra 2014, hvor en grup-

pe astronomer rejser igennem et såkaldt ormehul fra et supermassivt roterende sort hul for at finde et nyt hjem for menneskeheden. Sorte huller har i høj grad også fundet vej til vores sprog, hvor udtrykket “at være havnet i et sort hul” betyder, inspireret af den fysiske fortolkning, at være havnet i en tilstand, som det er svært at komme ud af.

Siden 1960'erne er der udgivet en lang række bøger om sorte huller, både i populærvidenskabelige sammenhænge og lærebøger på universitetsniveau. Den akademiske litteratur om generel relativitetsteori og sorte huller er for det meste mere eller mindre opbygget på samme måde: Efter en indledning om den specielle relativitetsteori introduceres de nødvendige matematiske koncepter og redskaber for at beskrive en krum rumtid, altså den generelle relativitetsteori. Derefter udledes Einsteins feltligninger, der matematisk i form af tensorer beskriver, hvordan energi og masse får rumtiden til at krumme. Derefter løses ligningerne i de få tilfælde, hvor der kan findes eksakte løsninger f.eks. vakuumløsninger, der beskriver tyngdefeltet udenfor en massefordeling, hvoraf Schwarzschild-løsningen, grundet sine symmetrier, er den mest simple. Selve tilgangen til matematikken varierer en del fra bog til bog. F.eks. har bøger som [3, 22, 8] en meget geometrisk tilgang i form af differential geometri, hvorimod bøger som [12, 28] har en mere direkte ikke-geometrisk tilgang. På et lidt mere tilgængeligt niveau kan f.eks. nævnes James Hartles bog [8], der også har en geometrisk tilgang til den generelle relativitetsteori, men benytter sig af “explore first, derive later” tilgangen (opdag først, udled senere). Her udleder han ikke feltligningerne til at starte med, men postulerer relevante løsninger, f.eks. Schwarzschild-løsningen, og fokuserer på den fysiske fortolkning af disse.

I dette speciale vil vi *ikke* følge den traditionelle vej til forståelsen af sorte huller, men i stedet lette forståelsen ved at arbejde med analogier mellem den specielle relativitetsteori og den generelle relativitetsteori og forbinde dem vha. ækvivalensprincippet. Denne tilgang er i høj grad inspireret af en foredragsrække på Stanford-universitetet af Professor Leonard Susskind, under den overordnede titel “The Theoretical Minimum” (det teoretiske minimum), hvorunder der kan findes forelæsninger om sorte huller. Ifølge Susskind selv er kurserne rettet mod folk, der har et vist kendskab til algebra og calculus, men er mere eller mindre nybegyndere mht. generel relativitetsteori. Denne undervisningsmetode repræsenterer en pendant til de ovennævnte tilgange til sorte huller og generel relativitetsteori. Med denne tilgang er det forhåbningen at opbygge fysisk intuition ud fra noget, vi kender ganske godt, den specielle relativitetsteori, og overføre det til den generelle. Vi vil arbejde med at finde analogierne mellem den specielle og generelle relativitetsteori, underbygge dem på et matematisk grundlag, og se hvor langt vi kan strække analogierne mellem de to, men også i høj grad være opmærksom på, når analogierne ikke holder.

Mere konkret vil vi kigge på den rolle, acceleration spiller i den specielle relativitetsteori, og udlede den såkaldte egenacceleration, som er den acceleration, en observatør oplever i sit eget hvilesystem. Ved at kigge på positionen som funktion af tiden for en observatør, der undergår konstant egenacceleration, kan vi komme frem til den såkaldte hyperbolske bevægelse og faktisk indse, at der også i den specielle relativitetsteori opstår begivenhedshorisonter. Ved at bruge ækvivalensprincippet, der siger, at acceleration af en referenceramme har samme effekt som en tyngdefelt, der virker i modsatte retning, vil vi forklare, hvordan begivenhedshorisonter opstår i den generelle relativitetsteori.

Karakteristisk for hyperbolsk bevægelse er, at den kun dækker en del af

Minkowski-diagrammet, som også kaldes Rindler-kilen. Den første del af specialet vil vi hellige os udledningen af de såkaldte Rindler-koordinater, der egner sig til at beskrive accelererende partikler, dvs. partikler der undergår hyperbolsk bevægelse. Rindler-koordinater og Rindler-kilen er opkaldt efter den amerikanske fysiker Wolfgang Rindler, der udbredte kendskabet til koordinaterne igennem en række bøger om speciel og generel relativitetsteori fra 1960'erne og fremefter, se f.eks. [18]. Selvom koordinaterne og kilen bærer Rindlers navn, var han dog langt fra den første til at beskrive hyperbolsk bevægelse. Allerede i 1914 udgav Max Born en artikel [2], hvor han bruger hyperbolsk bevægelse til at beskrive, hvad der i speciel relativitetsteori svarer til et stift legeme fra klassisk fysik og accelerationen af et stift legeme, også kaldet Born-stivhed. I 1935 udgav Einstein og Rosen en artikel [5], der (dog kun i en fodnote) decideret opskriver Rindler-koordinaterne og nævner, at de kun dækker en del af Minkowski-rummet.

I anden del af specialet, den kvantemekaniske del, vil vi bruge vores viden om Rindler-koordinater og kvantemekanik til at lette forståelse af den såkaldte Hawking-stråling, der er en kvantemekanisk effekt ved sorte huller, der postulerer, at sorte huller faktisk udsender Planck-stråling i omegnen af begivenhedshorisonten. Dette vil vi gøre ved først at udlede den såkaldte Unruh-stråling, der postulerer, at accelererende partikler vil observere Planck-stråling, hvorimod en inertielt observatør ikke observerer noget. Igen bruges ækvivalensprincippet til at bygge bro mellem de to typer stråling.

Lad mig knytte en kommentar til det faglige niveau igennem specialet. Som det allerede fremgår af ovenstående oversigt, er det faglige niveau beregnet til universitetsstuderende, der som minimum har et vist kendskab til den specielle relativitetsteori, analytisk mekanik og kvantemekanik. I kapitel 4 vil jeg dog vise, hvordan man kan tilpasse hyperbolsk bevægelse og begivenhedshorisonten i den specielle relativitetsteori, således at det egner sig til gymnasialt A-niveau i fysik og matematik, der f.eks. kunne arbejdes med i forbindelse med studieretningsprojektet SRP i 3.g.

En del personer har bidraget til dette speciale, og jeg vil især fremhæve min vejleder Ulrik. Først og fremmest vil jeg takke Ulrik for at imødekomme mit ønske om at lave et speciale, der har et formidlingsmæssigt aspekt. Derudover vil jeg takke ham for at introducere mig for en masse spændende emner indenfor relativitetsteorien, især Rindler-kilen, og udover det give mig frie tøjler til at følge min faglige interesse og dreje specialet i retning mod tyngdekraften og sorte huller. Til sidst vil jeg takke ham for interessante videnskabelige diskussioner og for altid at have tid til at mødes med mig og give mit arbejde konstruktiv kritik. Lad mig også takke Lars Madsen (også kendt som Daleif), der igennem hele specialeforløbet (og faktisk igennem hele min studietid!) har været umådelig flink og tålmodig til at hjælpe mig med \LaTeX .

Til sidst vil jeg også takke min søster Karen og min ven Sissel for at have læst store dele af specialet igennem og bidraget med korrekturlæsning og nyttige input.

Del I

Fundamentet

Kapitel 2

Acceleration i den specielle relativitetsteori

Vores mål i det følgende er at udlede den såkaldte egenacceleration, som er den acceleration, en partikel oplever i sit hvilesystem. Vi starter med at kigge helt generelt på fire-vektorer og rumtidsintervaller, for derefter at arbejde os frem mod fire-positionen, fire-hastigheden, fire-accelerationen og herunder definere egenaccelerationen.

Man kunne fristes til at spørge, hvorvidt acceleration overhovedet er forenelig med den specielle relativitetsteori. Når vi snakker om acceleration i forbindelse med relativitetsteori, er det ofte for at forklare overgangen fra den specielle til den generelle relativitetsteori. Her ligestiller ækvivalensprincippet et accelererende referencesystem i en bestemt retning med et tyngdefelt, der virker i modsat retning, fordi acceleration og et tyngdefelt har samme effekt på objekter. Ligeledes har vi i den specielle relativitetsteori at gøre med inertielle referencesystemer (dvs. referencesystemer som *ikke* accelererer), så der er ikke noget, der tyder på, at acceleration kan behandles indenfor disse rammer.

Men den specielle relativitetsteori kan faktisk godt håndtere accelererende *partikler*, så længe referencesystemerne, hvori partiklerne bevæger sig, forbliver inertielle. For at tydeliggøre dette kan vi forestille os en partikel, der bevæger sig med konstant hastighed. Partiklens hvilesystem er således det referencesystem, der bevæger sig med partiklen, og derfor referencesystemet hvori partiklen er i hvile, dvs. hvori dens hastighed er lig nul. Hvis partiklen derimod accelererer, vil det omtalte hvilesystem kun instantant være et hvilesystem. Vi kan forestille os en sekvens af inertielle referencesystemer, der hver har en bestemt konstant hastighed, der bliver større fra system til system. Når partiklen accelererer gennem rummet, vil de forskellige inertielle referencesystemer skiftes til at være partiklens hvilesystem i og med, at dens hastighed ændres over tid. Vi kan dermed betragte den accelererende partikels hvilesystem som en kontinuert sekvens af forskellige inertielle hvilesystemer med forskellige hastigheder, der hver især kun momentant er partiklens hvilesystem.

2.1 Fire-vektorer og rumtidsintervallet

Lorentz-transformationen er en transformation til et inertielt referencesystem med koordinaterne (x', y', z', t') , med en hastighed v langs x -aksen, relativt til

et inertielt referencesystem med koordinaterne (x, y, z, t) . Denne transformation er givet ved

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx/c^2) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

hvor γ er den velkendte gamma-faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2)$$

Dette kan skrives på matrixform som

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

hvilket inspirer os til at definere en fire-vektor for positionen med indgangene $x^\mu = (x^0, x^i) = (ct, \vec{x})$. Tidsdelen betegnes altså x^0 , og rumdelene betegnes x^i . Hvis matricen i (2.3) skrives Λ_ν^μ , hvor μ betegner søjler, og ν betegner rækker, kan Lorentz-transformationen skrives på den kompakte form

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (2.4)$$

I det følgende vil summering være underforstået, når et græsk indeks gentages i et produkt, således at transformationen blot skrives $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$.

Vores mål er som sagt at udlede egenaccelerationen, som er den acceleration en partikel oplever i sit hvilesystem. Denne størrelse er invariant under en Lorentz-transformation, dvs. den har samme værdi i alle inertielle referencesystemer. Et kendt eksempel på noget, der er invariant, er rumtidsintervallet, som er givet ved skalarproduktet af fire-positionen med sig selv. Den differentielle udgave af rumtidsintervallet, som vi betegner ds^2 , er givet ved

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (2.5)$$

hvor $\eta_{\mu\nu}$ er Minkowski-metrikken givet ved

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Vi bruger Minkowski-metrikken til at hæve og sænke græske indekser $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$ og $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$. Vi kan anskue metrikken som en måde at sikre det rigtige fortegn på rumtidsintervallet. At rumtidsintervallet er invariant, altså at $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$ ses nemt ved at benytte Lorentz-transformationen. Det gælder helt generelt, at skalarproduktet af to fire-vektorer er Lorentz-invariant dvs. $A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$, hvor A^μ og B_μ er vilkårlige fire-vektorer.

Lad os vende tilbage til rumtidsintervallet. Vi kan inddele rumtidsintervallet i tre kategorier alt afhængig af fortegnet

$$\begin{aligned} ds^2 &> 0 \\ ds^2 &= 0 \\ ds^2 &< 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vi er interesserede i såkaldte tidslige intervaller, som rent matematisk er defineret som rumtidsintervaller hvor $ds^2 > 0$. Dette medfører, at $c^2 dt^2 > d\vec{x}^2$, der kan fortolkes som at tidsdelen dominerer over rumdelen. Ud fra denne ulighed kan vi direkte se, at et tidsligt interval udelukker $dt = 0$, altså begivenheder, der sker til samme tid. For tidslige intervaller er der altså ingen referencesystemer, hvori begivenhederne er simultane. Man kan til gengæld vise, at der for tidsligt separerede begivenheder eksisterer et referencesystem (som man kan finde via en Lorentz-transformation), hvori begivenhederne sker samme sted. Hvis begivenhederne sker samme sted er $d\vec{x} = 0$. Tiden målt i systemet hvor $d\vec{x} = 0$ kaldes egentiden og betegnes τ , og er altså defineret som tidsintervallet mellem to begivenheder (f.eks. udsendelse og modtagelse af en lyspuls på et lysur) målt i det referencesystem, hvor de sker samme sted. Indsætter vi $d\vec{x} = 0$ i (2.5), kan vi se, at et tidsligt ruminterval er givet ved

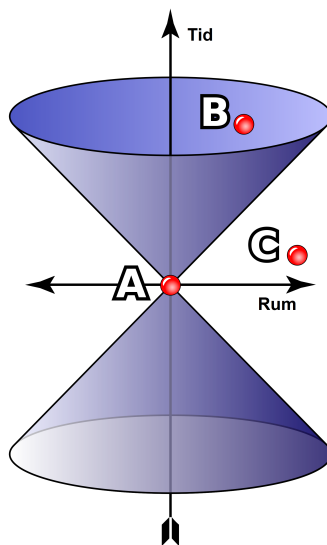
$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \tag{2.8}$$

Et tidsligt rumtidsinterval er altså defineret som lysets hastighed ganget med egentiden. Intervallet betegnes tidsligt, fordi vi skal bruge et ur for at måle separationen i rumtiden mellem tidsligt separerede begivenheder, som det fremgår af ovenstående formel. Et eksempel på et sådant system er hvilesystemet, der som sagt er et system, der bevæger sig med partiklen, således at partiklen i dette systemet er i hvile. Fordi hvilesystemet er et helt specifikt inertielt system, er egentiden derfor en invariant: Tiden der går på et bestemt ur er uafhængigt af, hvem der aflæser det pågældende ur [25]. Vi kan også direkte se fra (2.8), hvorfor egentiden er invariant: Den består af to størrelser, der begge er invariante under en Lorentz-transformation, nemlig rumtidsintervallet og lysets hastighed.

Før vi går videre, så lad os introducere rumtidsdiagrammet, også kaldet Minkowski-diagrammet. Som navnet antyder, er det et diagram, der afbilder rumtiden. Specifikt bliver rum plottet langs 1. akse og tid langs 2. akse. Hvis man bruger ct i stedet for tiden t som tidsaksen, har begge akser enheden længde. En partikels bane på Minkowski-diagrammet kaldes dens verdenslinje. Hvis en partikel bevæger sig med konstant hastighed v , er dens position som funktion af tiden givet ved $x = x_0 + vt = x_0 + \frac{v}{c}(ct)$, der er en ret linje med hældningen $\frac{v}{c}$ i Minkowski-diagrammet. En massiv partikel kan ikke bevæge sig hurtigere end lysets hastighed c , så derfor skal hældningen på dens verdenslinje være større end 1. Sagt på en anden måde, så skal vinklen mellem rumaksen og verdenslinjen være større end 45° , og en verdenslinje med en vinkel på præcis 45° beskriver en lyspuls. I tre dimensioner vil verdenslinjen for en lyspuls derfor være givet ved en kegle, som det ses på figur 2.1.

Grunden til, at vi fokuserer på tidslige begivenheder, er, at massive partikler (altså partikler med en ikke-nul hvilemasse), og som derfor bevæger sig med en hastighed lavere end lyset, bevæger sig langs tidslige kurver på Minkowski-diagrammet. Det betyder, at deres kurver på Minkowski-diagrammet altid er

indenfor lyskeglen, hvilket også ses på figur 2.1. Her ses det, at begivenhederne A og B er tidsligt separerede. Fordi begivenheden B sker til et senere tidspunkt end begivenheden A, ligger B derfor indenfor A's fremtid. Generelt vil alle begivenheder indenfor den øverste del af lyskeglen (dvs. lyskeglen karakteriseret ved positiv tid) ligge indenfor A's fremtid. Omvendt vil alle begivenheder i den nederste del af lyskeglen ligge i A's fortid. Denne fortolkning af tidsligt separerede begivenheder, samt fremtid og fortid skal blive ganske vigtig i vores senere diskussion om sorte huller. Lad mig kort nævne de to andre ruminter-



Figur 2.1: Begivenhederne A og B er tidsligt separerede, hvorimod begivenhederne A og C er rumligt separerede. De to blå kegler repræsenterer lyskeglerne.

valler $ds^2 < 0$ og $ds^2 = 0$. Hvis $ds^2 < 0$, medfører det, at $d\vec{x}^2 > c^2 dt^2$, således at der *ikke* kan defineres et system hvori $dx = 0$. Ovenstående diskussion må betyde, at vi derfor ikke kan definere en egentid. Det gælder til gengæld, at der findes et referencesystem hvori $dt = 0$, altså hvor begivenhederne sker simultant, hvormed $ds^2 = -d\vec{x}^2$. Rumtidsintervallet ds bliver altså imaginært, og begivenheder vil ligge udenfor hinandens lyskegler, hvilket betyder, at der skal et overlyssignal til for at forbinde dem. Sådanne intervaller kaldes rumligt separerede begivenheder, fordi rumtidsintervallet skal måles f.eks. med en meterstok. Kigger vi igen på figur 2.1 ses, at A og C er rumligt separerede. Til sidst kan nævnes det lyslige interval $ds^2 = 0$, der, som navnet antyder, er karakteristisk for lyskeglerne på Minkowski-diagrammet. Begivenheder, der er lysligt separerede, vil altså begge ligge på lyskeglen på Minkowski-diagrammet, og er derfor forbundet af lyset.

Vender vi tilbage til tidsligt separerede begivenheder, ved vi fra (2.8), at egentiden kan udtrykkes vha. $ds^2 = c^2 d\tau^2$. Fordi ds^2 er den samme i alle

systemer, også i hvilesystemet, kan vi indsætte (2.8) i (2.5)

$$\begin{aligned}
 d\tau^2 &= \frac{1}{c^2} (c^2 dt^2 - d\vec{x}^2) \\
 &= dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2 dt^2} d\vec{x}^2 \right) \\
 &= dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right) \\
 &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Den totale egentid τ er givet ved integralet langs verdenslinjen

$$\tau = \int \frac{dt}{\gamma}. \tag{2.10}$$

For tidsintervaller, hvor hastigheder approksimativt er konstante, kan vi skrive egentiden som

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}. \tag{2.11}$$

Skriver vi dette på ikke-differentiel form, fås den velkendte formel for tidsforlængelse, $\Delta t = \gamma \Delta \tau$, der betyder, at tidsintervallet mellem to begivenheder altid er kortest i det system, hvori de sker samme sted (dvs. i hvilesystemet). Hvis tidsintervallet mellem to begivenheder (f.eks. udsendelse og modtagelse af en lyspuls på et lysur) er kortest, vil uret i dette system gå hurtigst. I alle andre referencesystemer, der bevæger sig relativt til dette, vil tidsintervallet være længere med gammafaktoren, dvs. uret går langsommere.

2.2 Fire-hastighed

Lad os nu rette blikket mod fire-hastighed og fire-acceleration i relativitetsteori. I Newtonsk fysik udregnes hastigheden og accelerationen ved hhv. at tage den første- og andenafledte af positionen mht. tiden. I den specielle relativitetsteori defineres fire-hastigheden og fire-accelerationen derimod ved at tage hhv. den første- og andenafledte af fire-positionen mht. *egentiden*. Argumentet for at bruge egentiden τ og ikke koordinattiden t er, at førstnævnte som bekendt er invariant. Koordinattiden afhænger til gengæld af en bestemt referenceramme, som det ses ud fra $dt = \gamma d\tau$. Vi opskriver nu fire-hastigheden vha. egentiden som

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \tag{2.12}$$

Lad os starte med at udregne tids-komponenten af fire-hastigheden

$$v^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = c\gamma, \tag{2.13}$$

hvor vi har brugt kædereolen og (2.11). Samme metode bruges til at udregne rum-komponenten v^i

$$v^i = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \vec{v}\gamma.$$

Vi kan altså opskrive fire-hastigheden som

$$v^\mu = \gamma(c, \vec{v}). \quad (2.14)$$

Ligesom skalarproduktet af fire-positionen med sig selv, dvs. rumtidsintervallet, er invariant, er skalarproduktet af fire-hastigheden med sig selv invariant

$$v^\mu v_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) \quad (2.15)$$

$$= \gamma^2 c^2 \gamma^{-2} \quad (2.16)$$

$$= c^2. \quad (2.17)$$

Vi kunne også have opnået dette resultat på en nemmere måde: Det smarte ved relativistiske invarianter er nemlig, at de kan evalueres i alle inertielle referencesystemer. Et oplagt system at vælge er hvilesystemet, hvori partiklen er i hvile, dvs. $\vec{v} = 0$. I hvilesystemet er fire-hastigheden altså givet ved $v^\mu = (c, \vec{0})$ (fordi $\gamma = 1$ når $\vec{v} = 0$) og skalarproduktet af fire-hastigheden bliver $v^\mu v_\mu = c^2$, hvilket er samme resultat som (2.17). Denne indsigt hjælper os dog ikke synderligt hvad angår fire-hastigheden, fordi det i forvejen ikke var svært at udregne (2.17). Hvad angår fire-accelerationen er det imidlertid en anden sag, som vi nu skal se.

2.3 Fire-acceleration

Selvom vi ikke har udregnet fire-accelerationen endnu, kan vi allerede sige noget om forholdet mellem fire-hastigheden og fire-accelerationen, nemlig at $v^\mu a_\mu = 0$, hvilket betyder, at fire-hastigheden og fire-accelerationen er ortogonale. For at vise dette vil vi udnytte, at $v^\mu a_\mu$ kan skrives som den afledte af $v^\mu v_\mu$ mht. egentiden

$$\frac{d}{d\tau}(v^\mu v_\mu) = \left(\frac{d}{d\tau}v^\mu\right)v_\mu + v^\mu\left(\frac{d}{d\tau}v_\mu\right) \quad (2.18)$$

$$= a^\mu v_\mu + v^\mu a_\mu \quad (2.19)$$

$$= 2v^\mu a_\mu \quad (2.20)$$

$$= 0. \quad (2.21)$$

Det sidste lighedstegn gælder fordi $v^\mu v_\mu = c^2$, hvilket medfører, at $\frac{d}{d\tau}(v^\mu v_\mu) = 0$. Altså har vi vist, at

$$v^\mu a_\mu = 0. \quad (2.22)$$

Lad os nu udregne fire-acceleration, der som nævnt er givet ved den andenafledte af fire-positionen mht. egentiden

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{dv^\mu}{d\tau}. \quad (2.23)$$

Vi starter igen med først at udregne tids-komponenten

$$a^0 = \frac{dv^0}{d\tau} = c \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{\gamma^4}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}, \quad (2.24)$$

hvor vi har brugt (2.13) og

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\vec{v}} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \gamma^3 \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\vec{v}}{d\tau} \quad (2.25)$$

$$= \gamma^3 \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma^4}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}. \quad (2.26)$$

Rum-komponenten af fire-acceleration er givet ved

$$a^i = \frac{dv^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\gamma\vec{v}) = \frac{d\gamma}{d\tau}\vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{d\tau} \quad (2.27)$$

$$= \frac{d\gamma}{d\tau}\vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (2.28)$$

$$= \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} + \gamma^2 \vec{a}. \quad (2.29)$$

Forener vi rum- og tidskomponenterne, fås altså, at fire-acceleration er givet ved

$$a^\mu = \left(\frac{\gamma^4}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{a}, \frac{\gamma^4}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right). \quad (2.30)$$

Egenacceleration

Vi er interesserede i at finde egenaccelerationen, altså den acceleration en partikel oplever i sit hvilesystem. Egenaccelerationen kan udregnes vha. skalarproduktet af fire-accelerationen med sig selv, som vi nu skal se. Lad os starte med at udregne a^μ i partiklens hvilesystem, altså når $\vec{v} = 0$. Eftersom det kun er det sidste led i rum-komponenten af a^μ der overlever, og fordi $\gamma = 1$ når $\vec{v} = 0$, fås

$$a^\mu = (0, \vec{a}). \quad (2.31)$$

Vi kan hermed se, at fire-acceleration er nul, hvis og kun hvis $\vec{a} = 0$ i hvilesystemet. Vi ved også, at fire-hastigheden i hvilesystemet er givet ved $v^\mu = (c, \vec{0})$, og produktet af disse to giver tydeligvis nul. Hvis dette gælder i hvilesystemet, må det også gælde i alle andre inertielle referencesystemer, fordi skalarproduktet er invariant, hvormed vi har bevist (2.22), denne gang med et konkret udtryk for fire-accelerationen. Så langt så godt. Nu kan vi nemt, vha. (2.31), udregne skalarproduktet af fire-accelerationen med sig selv i hvilesystemet

$$a^\mu a_\mu = -\vec{a}^2 \equiv -\alpha^2, \quad (2.32)$$

hvor α betegner længden af accelerationsvektoren i hvilesystemet, den såkaldte egenacceleration, som altså er givet ved

$$\alpha = \sqrt{-a^\mu a_\mu}. \quad (2.33)$$

Bemærk at minustegnet ikke har nogen fysisk betydning, men kommer udelukkende pga. den specifikke form af Minkowski-metrikken vi bruger, som det fremgår af (2.6). Havde den i stedet haft formen $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, ville der ikke være et minus i (2.32) og (2.33).

Vi har nu udregnet skalarproduktet af fire-accelerationen med sig selv i hvilesystemet, og grundet invariansen er den givet ved $\alpha = \sqrt{-a^\mu a_\mu}$ i alle inertielle referencesystemer. For at finde den eksplicitte form af egenaccelerationen

indsætter vi bare fire-accelerationen (2.30) i $a^\mu a_\mu$

$$a^\mu a_\mu = \frac{\gamma^8}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - \frac{\gamma^8}{c^4} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 v^2 - \gamma^4 a^2 - 2 \frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \quad (2.34)$$

$$= -\gamma^4 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \frac{\gamma^6}{c^2} \left(-\gamma^2 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} + 2 \right) \quad (2.35)$$

$$= -\gamma^4 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \frac{\gamma^6}{c^2}. \quad (2.36)$$

Hvis accelerationen og hastigheden er parallelle fås

$$a^\mu a_\mu = -\gamma^4 a^2 - \frac{\gamma^6 v^2 a^2}{c^2} \quad (2.37)$$

$$= -\gamma^6 a^2 \left(\gamma^{-2} + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (2.38)$$

$$= -\gamma^6 a^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (2.39)$$

$$= -\gamma^6 a^2. \quad (2.40)$$

Indsætter vi (2.40) i (2.33), har vi, at det eksplicitte udtryk for egenaccelerationen er givet ved

$$\alpha = \gamma^3 a. \quad (2.41)$$

Ligningen fortæller os altså, at der er et forhold mellem egenaccelerationen α og den "almindelige" koordinatacceleration a . Vi kan forstå lidt mere om egenaccelerationen ved at omskrive (2.41) til $\alpha = \frac{d\gamma v}{dt}$, hvilket nemt indsæt ved at indsætte gammalfaktoren og bruge produktreglen. Vi ved fra fire-hastigheden, $v^\mu = \gamma(c, \vec{v})$, at $\gamma \vec{v}$ er den rumlige del af fire-hastigheden, således at vi kan skrive egenaccelerationen som

$$\alpha = \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\tau}. \quad (2.42)$$

Det betyder, at egenaccelerationen, på en lidt abstrakt måde, er en blanding af egentiden τ og koordinattiden t .

Kapitel 3

Rindler-koordinater

3.1 Udledning af koordinaterne

Målet er at beskrive partikler, der undergår konstant egenacceleration. Vi tager udgangspunkt i den udledte egenacceleration, og vil herfra finde et udtryk for partiklens position som funktion af tiden. Egenaccelerationen er givet ved

$$\alpha = \gamma^3 a, \quad (3.1)$$

som vi også kan skrive på formen

$$\alpha = \gamma^3 \frac{dv}{dt}. \quad (3.2)$$

For at finde hastigheden, laver vi en integration

$$\int_0^t \alpha dt = \int_0^v \gamma^3 dv, \quad (3.3)$$

hvor vi har ladet partiklen starte i hvile, dvs. $v = 0$ til $t = 0$. Fordi egenaccelerationen α er konstant, kan vi tage denne udenfor integralet og får

$$\alpha t = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.4)$$

der, ved at isolere hastigheden, giver os

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}}. \quad (3.5)$$

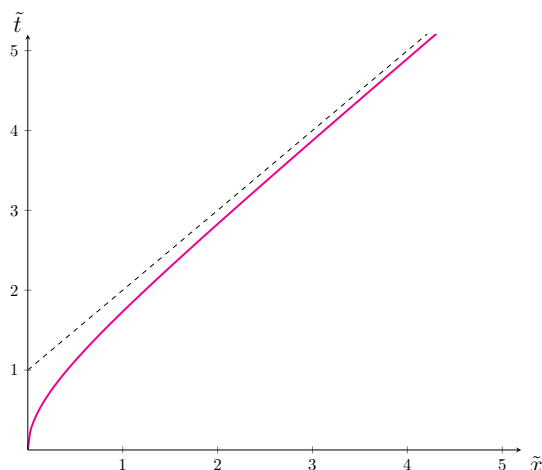
Integreres igen fås positionen som funktion af koordinattiden t

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad (3.6)$$

der giver

$$x(t) = \frac{c^2}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Vi kan altså se, at partiklens position som funktion af koordinattiden er givet ved en hyperbel, hvilket er grunden til, at man i den specielle relativitetsteori typisk kalder bevægelse under uniform acceleration for hyperbolsk bevægelse. Vi kan tydeliggøre hyperblen ved at lave et simpelt skift af variable til $\tilde{x} = \alpha x/c^2$ og $\tilde{t} = \alpha t/c$. Nu kan positionen skrives



Figur 3.1: Verdenslinje for en partikel, der undergår uniform acceleration samt et lyssignal (stiplet linje). Partiklen får et tidsmæssigt forspring.

$$\tilde{x} = \sqrt{1 + \tilde{t}^2} - 1, \quad (3.8)$$

som kan omroteres til

$$(\tilde{x} + 1)^2 - \tilde{t}^2 = 1, \quad (3.9)$$

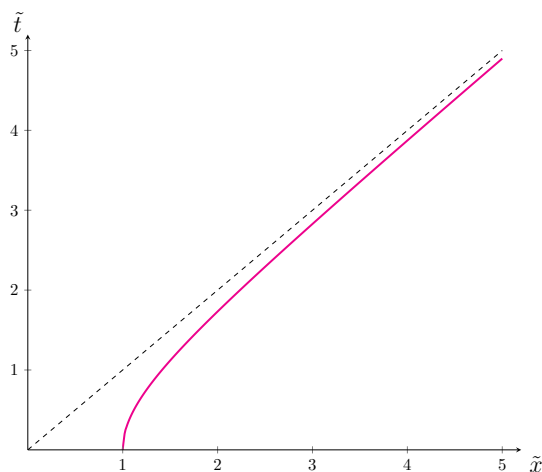
hvilket er hyperblens ligning. Denne specifikke hyperbel har centrum i $(-1, 0)$ og skærer akserne i origo, som er plottet på figur 3.1. Lad os kigge på asymptoten for denne hyperbel, da den har en meget interessant fysisk fortolkning. Asymptoten kan findes ved f.eks. at sætte højresiden af (3.9) lig nul. Alternativt kan vi isolere \tilde{t} i (3.9), der giver $\tilde{t} = \sqrt{(\tilde{x} + 1)^2 - 1}$ som vi for $\tilde{x} \rightarrow \infty$ kan rækkeudvikle til $\tilde{t} \approx \tilde{x} + 1$, der repræsenterer en ret linje, der skærer akserne i $\tilde{t} = 1$. Indsætter vi definitionerne for \tilde{x} og \tilde{t} fås $ct = x + c^2/\alpha$. Denne ligning repræsenterer altså asymptoten, men det er *også* ligningen for et lyssignal, der skærer Minkowski-diagrammets tidsakse (ct -aksen) i c^2/α . Der er altså tale om et lyssignal, der bliver udsendt til tidspunktet $t_0 = c/\alpha$ senere end partiklen, som vi jo har krævet starter til $t = 0$. Hvis lyssignalet udsendes tidligere, f.eks. $t_0/2$, vil lysets linje og hyperblen skære hinanden, eller sagt på en mere fysisk måde, så vil lyset indhente partiklen.

Det, vi altså kan konkludere, er, at hvis lyset udsendes tidligere end t_0 , vil lyset indhente partiklen, men hvis den udsendes senere end t_0 , vil partiklen i mellemtiden have opnået en tilstrækkelig acceleration til ikke at blive indhentet. Tiden t_0 markerer altså den tid, som den accelererende observatør som minimum skal have været undervejs, hvis han skal undslippe lyset. Har han været undervejs i $t < t_0$, vil lyset indhente ham. Hvis lyset ikke han indhente ham, er det derfor ikke muligt at etablere en tovejskommunikation mellem en

observatør, der udsender lyset, og den accelererende observatør. Dette er et eksempel på en begivenhedshorizont, som vi kan beskrive som en afgrænsning af rumtiden, hinsides hvilken begivenheder umuligt kan påvirke den accelererende observatør. Denne begivenhedshorizont er altså karakteriseret ved tiden

$$t_0 = \frac{c}{\alpha}. \quad (3.10)$$

Vi tænker oftest på begivenhedshorisonter i den generelle relativitetsteori, specifikt i forbindelse med sorte huller (som vi senere skal se), hvor lyset der udsendes indenfor det sorte huls begivenhedshorizont ikke kan nå frem til en observatør udenfor det sorte hul. Men nu har vi vist, at begivenhedshorisonter også opstår i den specielle relativitetsteori, når vi betragter observatører, der undergår konstant egenacceleration.



Figur 3.2: Verdenslinje for en partikel, der undergår uniform acceleration samt et lyssignal (stiplet linje). Partiklen får et positionsmæssigt forspring.

I stedet for at lade lyset udsendes til et senere tidspunkt end partiklen, og på den måde lade partiklen få et tidsmæssigt forspring, kan vi tilsvarende lade partiklen og lyset blive udsendt til samme tid, men til gengæld lade partiklen starte længere fremme, så den får et positionsmæssigt forspring. Dette scenarie ses på figur 3.2. Fysikken er helt den samme, men fordelene er nu, at hyperblen har centrum i origo, og er dermed symmetrisk omkring tidsaksen, samt at asymptoten nu blot er givet ved $ct = x$. Vi kan nu definere begivenhedshorizonten, som den minimumsafstand, der skal være mellem lyset og den accelererende observatør, hvis han skal kunne undslippe lyset. Afstanden er givet ved

$$R_0 = ct_0 = \frac{c^2}{\alpha}. \quad (3.11)$$

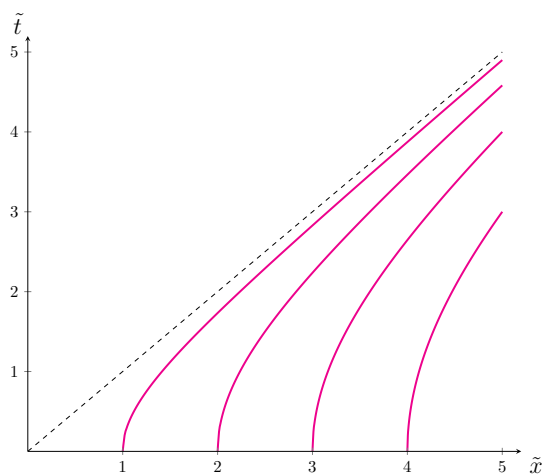
Er afstanden mindre end R_0 , vil lyset indhente den accelererende observatør. Med det omtalte valg af startbetingelse får vi et simplere udtryk for partiklens position som funktion af tiden

$$x(t) = \frac{c^2}{\alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}. \quad (3.12)$$

Vi kan forsvare dette rent matematisk ved at huske, at da vi udregnede (3.7), gjorde vi det ved at integrere hastigheden, og her har vi en frihed mht. valg af integrationskonstant. Den fysiske fortolkning af denne konstant er, at den repræsenterer en startbetingelse. De to ligninger (3.7) og (3.12) repræsenterer altså den samme fysik, men med forskellige startbetingelser, som vi rent grafisk kan se på figur 3.1 og 3.2. Det vil her være et godt tidspunkt at skifte til enheder hvor $c = 1$, hvormed (3.12) kan skrives

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.13)$$

Lad os kigge på den fysiske fortolkning af dette. Indsætter vi $t = 0$ i (3.13) fås



Figur 3.3: Hyperbolsk bevægelse for fire forskellige værdier af egenaccelerationen.

$x = 1/\alpha$. Det betyder, at $1/\alpha$ angiver afstanden ud til hyperblen på x -aksen, og eftersom denne er omvendt proportional med egenaccelerationen, ses altså, at jo længere vi bevæger os ud af x -aksen, desto lavere bliver egenaccelerationen. Omvendt, jo længere vi kommer ind mod origo, desto større bliver egenaccelerationen, hvilket ses på hældningen af de forskellige hyperbler på figur 3.3, der bliver større, jo længere ind mod origo de befinder sig. Lad os også nævne, at egenaccelerationen går mod uendelig, når hyperblens afstand til x -aksen går mod nul. Dette er blot den matematiske manifestation af, at den specielle relativitetsteori ikke tillader, at partikler accelereres op til lyshastigheden. Der eksisterer således en diskontinuitet mellem hyperblerne og lyskeglen. Dette er et eksempel på en singularitet, som vi vender tilbage til.

Det er her vigtigt at pointere, at egenaccelerationen langs hver hyperbel, der jo repræsenterer en observatør, er konstant lige meget, hvor på en bestemt hyperbel observatøren befinder sig, dvs. lige meget hvor lang tid accelerationen har stået på. Vi forbinder i hverdagen acceleration med noget fysisk, vi kan mærke, f.eks. et sug i maven når toget vi sidder i accelererer, og langs en bestemt hyperbel føler observatøren altså hele tiden samme sug. Det er kun fra hyperbel til hyperbel, at egenaccelerationen ændres. Fordi størrelsen $1/\alpha$ varierer langs x -aksen, kan vi tænke på det som en positions-koordinat, som vi vil tydeliggøre i det følgende.

Vi er dog ikke helt i mål endnu, for vi ønsker nu at udtrykke positionen og koordinattiden som funktion af egentiden. Vi ved, at $dt = \gamma d\tau$ og indsætter nu (3.5) i gammafaktoren og efter lidt algebra fås

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}, \quad (3.14)$$

hvor vi har genindført lysets hastighed i ligningerne. Vender vi brøken om og integrerer fås

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha t}{c}\right)^2}} = \frac{c}{\alpha} \sinh^{-1}\left(\frac{\alpha t}{c}\right), \quad (3.15)$$

hvorfra vi kan isolere koordinattiden t

$$t(\tau) = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha \tau}{c}\right). \quad (3.16)$$

Det sidste vi mangler er positionen som funktion af egentiden. Her indsætter vi blot (3.16) i (3.12) og bruger $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, hvormed vi får

$$x(\tau) = \frac{c^2}{\alpha} \cosh\left(\frac{\alpha \tau}{c}\right). \quad (3.17)$$

Med (3.16) og (3.17) har vi transformeret de "almindelige" koordinater x og t , altså dem vi bruger i Minkowski-rummet, således at de kan bruges til at beskrive partikler, der undergår uniform acceleration. Dette rum kaldes også Rindler-rummet, og partiklerne (eller observatørerne) kaldes Rindler-observatører. Vi har altså fundet de nødvendige ligninger til at lave en transformation fra Minkowski-rummet til Rindler-rummet. Lad os nu definere de tilhørende Rindler-koordinater. For at lette notationen, vil vi igen skifte til $c = 1$, og bibeholde det i resten af kapitlet. Som sagt kan vi tænke på $1/\alpha$ som en positionskoordinat, hvorfor vi definerer positionskoordinaten i Rindler-rummet som $X = 1/\alpha$. Tidskoordinaten i Rindler-rummet definerer vi som $T = \alpha\tau$, som vi senere skal se hvorfor. Med disse to koordinater, kan (3.17) og (3.16) skrives

$$t = X \sinh(T) \quad (3.18)$$

$$x = X \cosh(T). \quad (3.19)$$

I vores tilfælde skal vi altså bruge (3.18) og (3.19) til at transformere mellem Minkowski-koordinaterne (t, x) og Rindler-koordinaterne (T, X) . Ligesom vi kan definere Rindler-koordinater, kan vi også definere en Rindler-metrik. Husk på at Minkowski-metrikken er givet ved

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (3.20)$$

Indsættes således (3.18) og (3.19) fås

$$ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2, \quad (3.21)$$

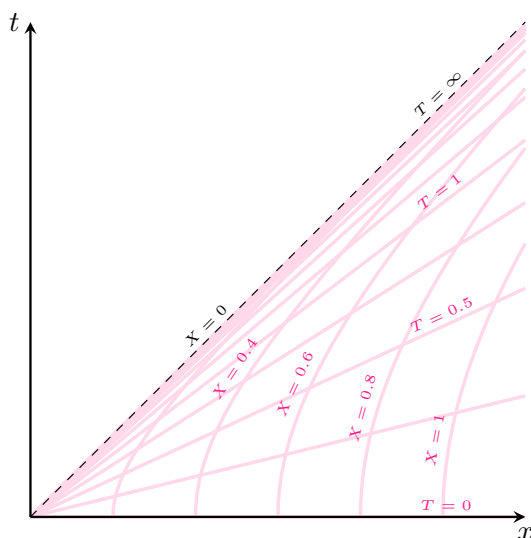
som repræsenterer metrikken for den flade rumtid, der egner sig til at beskrive uniformt accelererende partikler. Vi kan også definere den inverse transformation, altså transformationen, der får os tilbage til Minkowski-rummet. Denne er givet ved

$$X = \sqrt{t^2 - x^2} \quad (3.22)$$

$$T = \tanh^{-1}\left(\frac{t}{x}\right). \quad (3.23)$$

3.2 Rindler-kilen

Lad os kigge nærmere på koordinaten T . Hvis (3.23) skrives som $\tanh(T) = t/x$, ses det, at denne må være en ret linje i Minkowski-diagrammet for konstant T . Med Rindler-koordinaten T associerer vil altså rette linjer med en bestemt hældning, og med Rindler-koordinaten X associerer vi hyperbler, der repræsenterer en bestemt egenacceleration. Plotter vi et par af de rette linjer angivet ved T sammen med hyperblerne, angivet med X , ser det ud som på figur 3.4. Denne figur kaldes også Rindler-kilen, som vi vil forklare i det følgende. Vi kan hurtigt forstå den fysiske betydning af T . Hvis vi kigger på en bestemt Rindler-observatør, f.eks. en karakteriseret ved $X = 0.8$, kan vi se, at T repræsenterer noget, der varierer i tidsretningen, altså langs t -aksen i takt med, at observatøren bevæger sig langs hyperblen. Ligesom Rindler-koordinaten X repræsenterer position i Rindler-rummet, altså noget der varierer i positions-retningen, repræsenterer Rindler-koordinaten T derfor tiden i Rindler-rummet.

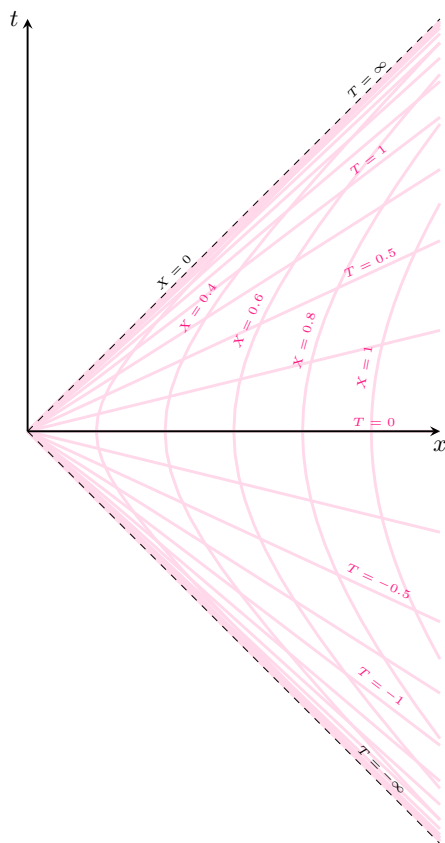


Figur 3.4: Rindler-kilen. Rindler-koordinaterne X og T angiver henholdsvis hyperblerne og de rette linjer.

Vi kan forstå lidt mere om T , hvis vi kigger på de punkter, hvor den skærer de forskellige hyperbler. Hvis vi f.eks. kigger på skæringen af hyperblerne med $T = 0.5$, kan man vise, at hældning af de forskellige hyperbler i dette punkt, dvs. Rindler-observatørernes hastighed, er den samme. Dette giver god mening, for hvis f.eks. observatørerne ved $X = 0.4$ og $X = 0.6$ til $T = 0.5$ skal have samme hældning på deres hyperbler, dvs. samme hastighed, skal observatøren ved $X = 0.6$ jo bruge længere (egen)tid for at opnå denne hastighed ift. hans makker ved $X = 0.4$, da han har en lavere egenacceleration end makkeren med $X = 0.4$ (husk på at $X = 1/\alpha$). Vi kan ydermere se dette ud fra, hvordan T er defineret, nemlig som $T = \alpha\tau$. Hvis T skal forblive konstant og egenaccelerationen α falder fra observatøren med $X = 0.4$ til makkeren med $X = 0.6$, må egentiden τ nødvendigvis stige. Tiden T bliver altså nødt til at være repræsenteret ved en ret linje.

Lad os også nævne asymptoten i Rindler-kilen, der er givet ved $X = 0$ og $T = \infty$. Vi ved, at asymptoten beskriver lyset, og eftersom $X = 1/\alpha$ kan vi betragte lyset som havende uendelig egenacceleration. Faktisk kan vi definere en foton, eller generelt en masseløs partikel, som én hvor $\alpha \rightarrow \infty$. Det kan også forklares ud fra tids-kordinaten T , forstået på den måde, at en Rindler-observatør skal accelerere i uendelig lang tid for at opnå lysets hastighed. Vi vender tilbage til asymptoten senere i forbindelse med vores diskussion om singulariteter.

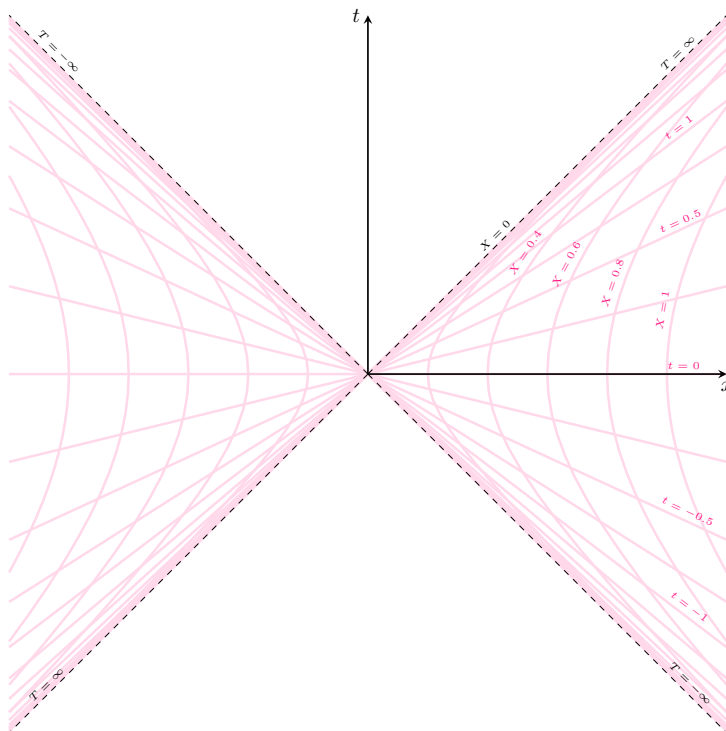
Medtager vi også negative værdier for T , ser det ud som vist på Figur 3.5. Figurerne 3.4 og 3.5 er to eksempler på Rindler-kilen. Vi kan se, at Rindler-observatørerne er indskærpet i rummet mellem lyskeglerne, som i Rindler-kordinater er givet ved $X = 0$ og $T = \infty$ (den øvre) og $X = 0$ og $T = -\infty$ (den nedre) hvilket afspejler, at relativitetsteorien ikke tillader, at noget accelereres op til lyshastigheden. Rindler-observatørerne “kiler” sig derfor ind i en del af Minkowski-rummet. Rindler-rummet er således bare et underrum af Minkowski-rummet, og den ser ud som på figur 3.4 og 3.5, fordi vi har skiftet koordinater for bedre at kunne beskrive partikler der undergår uniform acceleration.



Figur 3.5: Rindler-kilen hvor vi også har medtaget negative værdier for T .

Til sidst kan nævnes, at vi også i princippet kan lave en spejling af Rindler-

kilen langs t -aksen, hvilket er vist på figur 3.6. Det er vigtigt at pointere, og det skal få stor betydning, når vi senere diskuterer Unrug-effekten, at tiden her er “omvendt”. Kigger vi på de so asymptoter i den spejlvendte Rindler-kile, ses at de går fra $T = \infty$ til $T = -\infty$.



Figur 3.6: Rindler-kilen hvor vi afbilder kilen i højre side og kilen i venstre side.

3.2.1 Singulariteter

Hvad menes der egentlig med en singularitet? Rent matematisk kan vi definere en singularitet som et bestemt punkt, hvor en funktion ikke er veldefineret. Lad os f.eks. se på funktionen $f(x) = 1/x$. Når $x \rightarrow 0$ har vi at $f(x) \rightarrow \infty$, og i dette punkt er funktionen altså ikke veldefineret. Vi vil i det følgende skelne mellem såkaldte koordinat-singulariteter og gravitationelle singulariteter, hvor førstnævnte er en singularitet, der skyldes valg af koordinater, og sidstnævnte er et bestemt punkt i rumtiden, hvor et objekts tyngdefelt bliver uendelig.

For at få en fornemmelse for singulariteter, så lad os kigge på polære koordinater. Polære koordinater er defineret ved den radiale koordinat r og den angulære koordinat θ , og er relateret til kartesiske koordinater (x, y) ved transformationen

$$x = r \cos \theta \quad (3.24)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (3.25)$$

Den radiale koordinat r måler den radiale afstand fra origo og θ er vinklen målt fra x -aksen i positiv omløbsretning, som vist på figur 3.7. Et punkt i det

polære koordinatsystem er altså givet ved de to koordinater (r, θ) . For en given r kan θ antage værdierne $[-2\pi, 2\pi]$ og udspænder dermed en cirkel.

Lad os finde metrikken for polære koordinater. Vi behøves blot at tage udgangspunkt i den rumlige del af Minkowski-metrikken (2.5) i to dimensioner

$$dl^2 = -dx^2 - dy^2, \quad (3.26)$$

hvor vi benævner den dl^2 og ikke ds^2 , for at markere, at det kun er den rumlige dimension, vi har med at gøre. Indsætter vi transformationerne (3.24) og (3.25), og bruger den velkendte $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ fås

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2. \quad (3.27)$$

Den inverse transformation, der bringer os tilbage til kartesiske koordinater er givet ved

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.28)$$

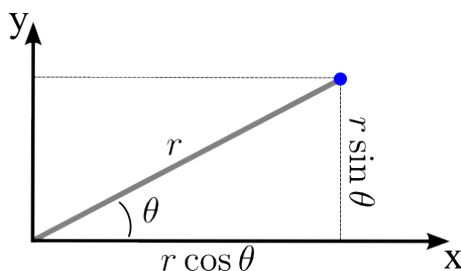
$$\theta = \tan^{-1}(y/x). \quad (3.29)$$

Vi kan nu se ligheden mellem transformationen fra kartesiske koordinater til polære koordinater (3.24)-(3.25) og transformationen fra Minkowski-koordinater til Rindler-koordinater (3.19)-(3.18) samt ligheden mellem de inverse transformationer (3.28)-(3.29) og (3.22)-(3.23).

Hvad sker der i origo i polære koordinater? Her bliver metrikken udartet, forstået på den måde, at forskellige værdier af θ svarer til det samme punkt, nemlig $r = 0$. Vi kan kalde dette en "mild" singularitet, da der ikke af nogle af metrikkens komponenter, der går mod uendelig. Anderledes ser det dog ud, hvis vi laver den simple koordinattransformation $r = d^2/\tilde{r}$, hvormed metrikken bliver

$$dl^2 = \frac{d^2}{\tilde{r}^4}(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\theta^2). \quad (3.30)$$

Nu går metrikken mod uendelig, når \tilde{r} går mod nul. I begge disse tilfælde er der tale om koordinatsingulariteter. Der sker ikke noget fysisk interessant ved punkterne $r = 0$ og $\tilde{r} = 0$. Geometrien er stadig et fladt plan, og husk på at singulariteten ikke opstår i kartesiske koordinater. Den opstår fordi vi skifter fra kartesiske til polære koordinater.



Figur 3.7: Polære koordinater.

Vender vi tilbage til vores hyperbolske bevægelse, kan vi se, at der her optræder en singularitet. Vi har nævnt, at jo kortere afstanden mellem origo og

hyperblen, desto større bliver egenaccelerationen. Rent matematisk gælder det at hvis $X \rightarrow 0$, så har vi, at $\alpha \rightarrow \infty$, og i dette tilfælde går hyperblen asymptotisk mod lyskeglen. Det er nu nemt at svare på, hvilken slags singularitet vi har med at gøre. Husk på at vi har skiftet til koordinater, der egner sig til uniformt accelererede partikler. Rindler-kilen er stadig en del af Minkowski-rummet, den kiler sig ind i en del af diagrammet, og almindelige Minkowski-observatører har ikke denne singularitet. Det er altså en koordinatsingularitet.

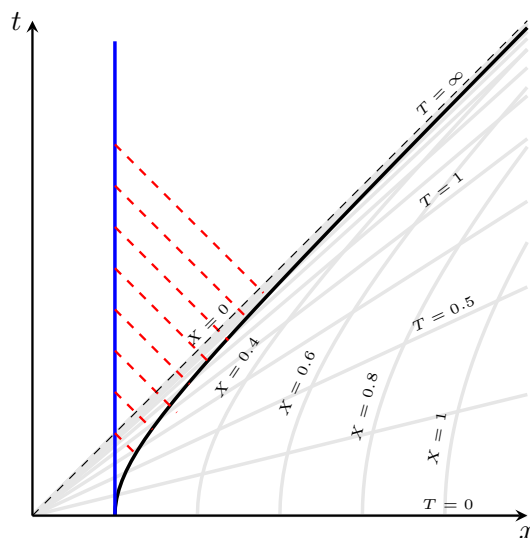
3.3 Rindler-horisonten

Vi kan få en endnu bedre forståelse af begivenhedshorisonten, som vi vil kalde Rindler-horisonten, og hvorfor der optræder en koordinatsingularitet. Udover at betragte en accelererende observatør, vil vi også betragte en, der til en bestemt tid stopper med at accelerere. Hvordan skal verdenslinjen for den observatør afbildes i Rindler-kilen, sammenlignet med hyperblerne? Husk på, at jo længere ud af x -aksen vi kommer, desto lavere bliver egenaccelerationen, hvilket rent grafisk betyder, at hyperblens hældning bliver mindre. Grænsetilfældet, hvor en observatør bevæger sig med konstant hastighed, er derfor repræsenteret ved en ret linje, der er tangent til det punkt på hyperblen, hvor accelerationen ophører. Denne rette linje er derfor karakteriseret ved $X = \infty$, fordi $X = 1/\alpha$.

Lad os fokusere på en bestemt hyperbel karakteriseret ved $X = 0.2$. Lad os forstille os, at denne hyperbel beskriver to identiske observatører, men hvor den ene til tiden $t = T = 0$ ophører med at accelerere. Vi kan f.eks. forestille os en totrinsraket (med en observatør i begge raketens sektioner), hvor den ene del frakobles til $t = T = 0$ og den anden del fortsat accelereres af motoren. Verdenslinjen for den frakoblede observatør vil altså være tangent til hyperblen $X = 0.2$ til tiden $T = t = 0$, som det ses på figur 3.8. Det fremgår altså, at den frigivne observatør efter en endelig egentid vil passere den accelererende observatørs horisont og på den måde bevæge sig ud af Rindler-kilen.

Vi kan forstå konsekvensen af frakoblingen ved at kigge på den kommunikation, der kan foregå mellem de to observatører. En måde de kan kommunikere på, er ved at kigge på hinanden, dvs. ved at udsende og modtage lyssignaler, ligeledes vist på figur 3.8. De kan f.eks. aftale på forhånd, at de begge sender et lyssignal hvert sekund for hele tiden at vide, hvor den anden befinder sig.

Vi betragter først Rindler-observatøren udsende lyssignaler, der som bekendt skal have en hældning på 45° i et Minkowski-diagram. Grundet lysets endelige udbredelseshastighed vil den frakoblede observatør derfor modtage lyssignalet til et senere tidspunkt. Selvom den frakoblede observatør passerer horisonten, vil han kunne blive ved med at modtage lyssignaler fra den accelererende observatør. Husk på, at horisonten optræder, fordi vi skifter koordinater for at beskrive observatører, der undergår uniform acceleration, dvs. Rindler-observatører. Den frakoblede observatør er jo netop ikke påvirket af nogen acceleration, og passerer derfor uhindret igennem horisonten, og vil derfor blive ved med at modtage lyssignaler fra Rindler-observatøren. Sagt på en anden måde, så vil han blive ved med at kunne se en Rindler-observatør, der bevæger sig hurtigere og hurtigere væk fra ham. Her skal det nævnes, at selvom der ikke sker noget specielt for den frakoblede observatør ved passagen igennem horisonten, så vil han alligevel se lyset fra Rindler-observatøren blive mere og mere rødforskuet, grundet deres relative acceleration væk fra hinanden. Der-



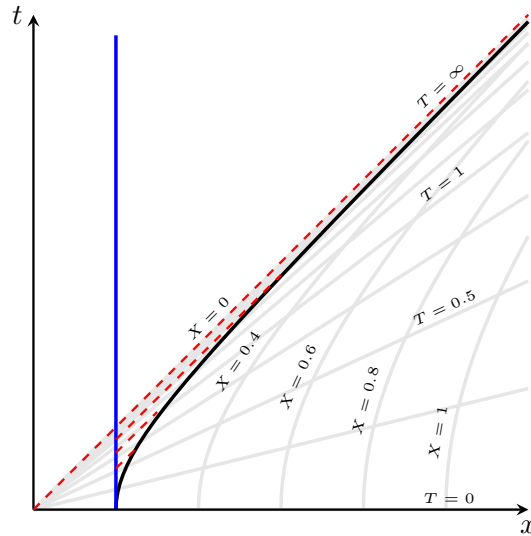
Figur 3.8: Den frakoblede observatør (den blå rette linje) modtager lys fra den accelererende observatør ved $X = 0.2$ (den sorte hyperbel). Der sker tydeligvis ikke noget nævneværdigt ved horisonten.

udover vil tiden der går, før den frakoblede observatør modtager signalerne, selvfølgelig stige i takt med accelerationen, men passagen igennem horisonten virker ikke anderledes for den frakoblede observatør, i forhold til tiden før han passerer den og efter han har passeret den.

For at etablere en tovejskommunikation skal den frakoblede observatør ligeledes udsende lyssignaler. Men i modsætning til før så er Rindler-observatørens modtagelse af lyssignalet nu betinget af, hvor den frakoblede befinder sig ift. horisonten, eller sagt på en anden måde, hvor lang tid den frakoblede observatør venter med at udsende lyssignalet. Dette kan ses på figur 3.9. Fra vores diskussion om Rindler-horisonten ved vi, at lyssignalet karakteriseret ved $X = 0$ og $T = \infty$ er horisonten for denne specifikke Rindler-observatør, (dvs. hyperblens asymptote) og markerer som nævnt den afgrænsning i rumtiden, hinsides hvilket begivenheder umuligt kan påvirke den accelererende observatør. Udsender den frakoblede observatør et signal til et senere tidspunkt, ville det kræve overlyshastighed, dvs. en på diagrammet mindre hældning end 45° , for at Rindler-observatøren skal kunne modtage den, hvilket ikke er muligt. Horisonten markerer altså en slags envejsdør, hvor signaler udsendt fra den anden side ikke vil nå frem. Dette står i skarp kontrast til det, som den frakoblede observatør ser.

Indtil den frakoblede observatør passerer horisonten, vil de udsendte signaler vare længere og længere tid om at nå frem til Rindler-observatøren, og han vil se den frakoblede observatør bevæge sig stadig langsommere, fordi han som bekendt accelererer væk fra den frakoblede. Derudover bliver vi også nødt til at tage højde for rødforskydning. Fordi de to observatører fjerner sig fra hinanden med større og større hastighed, vil Rindler-observatøren se det modtagne lys blive mere og mere rødforskydet på præcis samme måde, som den

frakoblede observatør gjorde. Men til forskel for det den frakoblede observatør ser, vil det sidste signal, som Rindler-observatøren modtager være det, som den frakoblede observatør udsendte lige før horisonten. Det må betyde, at Rindler-observatøren vil se den frakoblede observatør bruge uendelig lang tid på at passere horisonten. Konklusion: Den frakoblede observatør passerer horisonten uhindret i løbet af en endelig egentid, men set fra den accelererende observatør vil dette være en uendelighed!



Figur 3.9: Den accelererende observatør med $X = 0.2$ (den sorte hyperbel) modtager lys fra den frakoblede observatør (den blå rette linje). Hans modtagelse er tydeligvis betinget af, hvor den frakoblede befinder sig i forhold til horisonten.

Kapitel 4

Tilpasning til gymnasieniveau

4.1 Bevægelse under konstant kraft

Vi er allerede kommet en del udover gymnasieniveauet, også det der kan forventes på A-niveau i forbindelse med den store skriftlige opgave, SRP. Heller ikke resten af specialet er umiddelbart tilgængeligt for en gymnasieelev, så lad os, inden vi går videre, bremse op og overveje en mulig indgangsvinkel til hyperbolsk bevægelse og begivenhedshorisonter, som en gymnasieelev ville kunne arbejde med. Jeg vil i det følgende gå lidt mere i detalje med matematikken end hidtil for at illustrere de mellemregninger og skridt, man som gymnasieelev vil skulle gennemgå for at vise forståelse for stoffet.

I stedet for at bruge fire-vektorer og acceleration som tilgang, vil jeg i det følgende bruge noget, der er ganske velkendt fra gymnasiet, nemlig Newtons anden lov. Strategien bliver at kigge på en partikels position som funktion af tiden, når denne er udsat for en konstant kraft. Ved først at behandle det ikke-relativistiske tilfælde er overgangen til det relativistiske forholdsvis ligetil. Det eneste krav er kendskab til det relativistiske korrekte udtryk for bevægelsesmængden. Følgende er tildels inspireret af kapitel 12.2.4 i [7].

4.1.1 Ikke-relativistisk

Newtons anden lov er givet ved

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}, \quad (4.1)$$

hvor vi har udtrykt den vha. bevægelsesmængden $p = mv$ og selvfølgelig antaget, at massen ikke ændres over tid. Hvad er positionen som funktion af tiden, hvis en partikel påvirkes af en konstant kraft? Svaret findes ved at integrere $dp = Fdt$. Antager vi, at partiklen starter i hvile, dvs. $v = 0$ til $t = 0$, er også $p = 0$ til $t = 0$, fordi bevægelsesmængden afhænger af hastigheden. Integralet bliver dermed

$$\int_0^p dp = F \int_0^t dt, \quad (4.2)$$

hvor vi har taget kraften F udenfor integralet, da den som sagt er konstant. Løsningen er givet ved

$$p = Ft = mv, \quad (4.3)$$

hvor hastigheden kan isoleres til

$$v = \frac{Ft}{m}. \quad (4.4)$$

For at finde positionen som funktion af tiden, integreres endnu en gang

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t dt \quad (4.5)$$

$$= \frac{Ft^2}{2m}. \quad (4.6)$$

Positionen som funktion af tiden er altså matematisk beskrevet ved en parabel. Så langt så godt.

4.1.2 Relativistisk

En mulig fremgangsmåde kunne så være at modificere Newtons anden lov, således at den bliver i overensstemmelse med den specielle relativitetsteori. For at gøre det skal vi bruge det relativistiske korrekte udtryk for bevægelsesmængden

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv \quad (4.7)$$

En betydelig del af elevens arbejde kunne dedikeres til at udlede dette udtryk, hvor man f.eks. kunne tage udgangspunkt i kapitel 12 i [25]. En anden mulighed, omend lidt mere abstrakt, er at definere den relativistiske bevægelsesmængde i stil med kapitel 2 (dog uden brug af fire-vektorer) dvs. ud fra den afledte af hastigheden mht. *egentiden* τ .

$$p = m \frac{dx}{d\tau} = m \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = mv\gamma \quad (4.8)$$

hvor

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.9)$$

Denne mulighed hviler derfor på viden om et ur i bevægelse, da (4.9) jo er den differentielle udgave af $\Delta t = \gamma \Delta \tau$. Den relativistiske korrekte udgave af Newtons anden lov bliver dermed

$$F = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.10)$$

Nu kan vi formulere hyperbolsk bevægelse som bevægelse under en konstant kraft F , når vi tager højde for relativitetsteorien. Fremgangsmåden er nu *præcis* den samme som før, omend den matematiske sværhedsgrad stiger en smule. Vi betragter igen en partikel med masse m , der bliver påvirket af en konstant kraft F og finder så dens position som funktion af tiden. Vi løser ligningen ved igen at lave en integration af $dp = Fdt$

$$\int_0^p dp = \int_0^t Fdt, \quad (4.11)$$

hvor vi igen har taget kraften F udenfor integralet. Løsningen er nu

$$p = Ft = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.12)$$

der er et lidt mere kompliceret udtryk end før. Isolerer vi v fås

$$v = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}. \quad (4.13)$$

Her er det vigtigt at stoppe op og sammenligne med den ikke-relativistiske hastighed (4.4). Vi kan se, at den ikke-relativistiske hastighed er at finde i tælleren i (4.13), og at det relativistiske bidrag kommer fra nævneren. Vi kan anskue nævneren som en sikring af, at hastigheden v af vores partikel aldrig overskrider lysets (hvilket den ikke må i den specielle relativitetsteori), som eleven kan lave et grafisk bevis af ved at plote (4.4) og (4.13) i samme graf.

For at finde positionen som funktion af tiden integrerer vi igen

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}} dt'. \quad (4.14)$$

Dette integral er lidt vanskeligere at løse end det tilsvarende integral i det ikke-relativistiske tilfælde, men dog ikke sværere end eleven kan overkomme. F.eks. kan vi bruge integration ved substitutionen $u = Ft/mc$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} \int \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} du, \quad (4.15)$$

og enten bruge partiel integration eller slå op i en integraltabel

$$\int \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \sqrt{u^2 + 1}, \quad (4.16)$$

og får dermed

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + (Ft'/mc)^2}} dt' \quad (4.17)$$

$$= \frac{mc^2}{F} \left(\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} - 1 \right). \quad (4.18)$$

Positionen som funktion af tiden ses at være givet ved en hyperbel i kontrast til det ikke-relativistiske tilfælde, som var en parabel. Eleven kan få en fornemmelse af forskellen, ved at plote de to funktioner (4.6) og (4.18) i samme graf. Vi kan tydeliggøre hyperblen ved at anskue substitutionen u som en slags redefinering af tiden, som vi nu benævner $\tilde{t} = Ft/mc$ og ligeledes redefinere positionen til $\tilde{x} = Fx/mc^2$. Nu kan vi omformulere ovenstående til

$$(\tilde{x} + 1)^2 - \tilde{t}^2 = 1, \quad (4.19)$$

hvilket er hyperblens ligning og beskriver en hyperbel med centrum i $(-1,0)$ præcis som i kapitel 2. Denne form for bevægelse opstår f.eks., når en ladet partikel placeres i et uniformt elektrisk felt. Hvis $Ft/m \ll c$, kan vi bruge

tangentligningen på kvadratroden, $\sqrt{1 + (Ft/mc)^2} \approx 1 + Ft/mc^2$, hvilket giver os

$$x(t) \approx \frac{mc^2}{F} ((1 + (Ft/mc)^2) - 1) \quad (4.20)$$

$$= \frac{Ft^2}{m}. \quad (4.21)$$

Vi kan altså se, at i lav-hastigheds-approximation til det relativistiske udtryk får vi den klassiske parabel, som man må forvente af en korrekt teori.

Man kunne eksempelvis behandle dette i forbindelse med SRP i fysik, hvor matematik kunne supplere med rækkeudviklinger, herunder tangentligningen og hyperbolske funktioner.

Del II

Gravitationelle aspekter

Kapitel 5

Ækvivalensprincippet

5.1 Det svage og det stærke ækvivalensprincip

Indtil nu har vi kun bevæget os indenfor rammerne af den specielle relativitetsteori. Formålet med diskussionen om Rindler-horisonten er, at vi vil kombinere den med det såkaldte ækvivalensprincip for at beskrive begivenhedshorisonten for et sort hul, den såkaldte Schwarzschild-horisont. Et sort hul er et objekt, hvor tyngdekraften er så stærk, at end ikke lys kan undslippe. Indsigt i sorte huller opnås derfor med en teori for tyngdekraften, hvoraf den bedste teori på markedet er Einsteins generelle relativitetsteori. Forbindelsen mellem den specielle og den generelle relativitetsteori opnås igennem det såkaldte ækvivalensprincip. Det er derfor nøglen til at forstå sorte huller, hvorfor vi vil foretage en grundig gennemgang af princippet. Til forskel for mange aspekter af relativitetsteori er ækvivalensprincippet ikke baseret på et matematisk stringent grundlag, men derimod en subtil indsigt omkring forholdet mellem accelererede referencesystemer og tyngdekraften.

Speciel relativitetsteori omhandler som bekendt inertielle referencesystemer, dvs. referencesystemer der ikke accelererer. Grunden til, at vi har kunnet arbejde med acceleration indenfor rammerne af den specielle relativitetsteori er, at vi har analyseret accelererende *partikler* og defineret et instantant hvilesystem, som beskrevet i Kapitel 2. Vi søger nu en mere generel teori, der også kan anvendes til accelererede (dvs. ikke-inertielle) referencesystemer. Denne tankegang ledte Einstein i retningen af en teori for tyngdekraften. Ækvivalensprincippet ses i litteraturen i mange forskellige afskygninger og former, og vi følger i dette kapitel i nogen grad [19, 3, 8]. Vi vil fokusere på de vigtigste aspekter, der forbereder os på at kunne beskrive sorte huller.

Vi vil skelne mellem det såkaldte svage og det stærke ækvivalensprincip. Det svage ækvivalensprincip siger, at et legemes gravitationelle og inertielle masse er ens, hvilket medfører, at alle legemer i frit fald undergår samme acceleration uafhængig af deres masse. Det kan tydeliggøres ved at kigge på de to forskellige roller, som masse spiller i mekanik. Den masse, der indgår i Newtons anden lov $\vec{F} = m_i \vec{a}$, kaldes inertiell masse, og er et mål for legemets inerti, dvs. dets modvilje til at ændre hastighed. Den inertielle masse har en meget universel karakter, da kraften i Newtons anden lov kan have alle former (gravitationel, elektromagnetisk osv.). Kigger vi derimod på Newtons tyngdelov, spiller massen en anden rolle. Loven beskriver som bekendt, at en punktmasse m_g , der udøver

en kraft \vec{F}_g på punktmassen M_g over en afstand r , er givet ved

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_g M_g}{r^2} \hat{e}_r, \quad (5.1)$$

hvor \hat{e}_r er en enhedsvektor, der peger i retning mod massen M_g . For at gøre formelen sammenlignelig med $\vec{F} = m_i \vec{a}$, kan den skrives

$$\vec{F}_g = -m_g \vec{\nabla} \Phi, \quad (5.2)$$

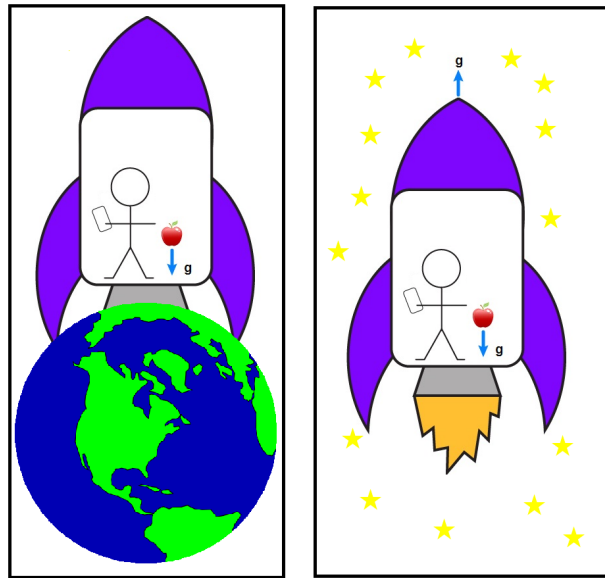
hvor $\Phi = -GM_g/r$ er tyngdepotentialet produceret af legemet med massen M_g . Ud fra de to formler ser det ud som om, at m_g er helt anderledes end m_i , da massen m_g specifikt optræder i forbindelse med tyngdekraften. Betragt vi et legeme i frit fald, dvs. at kraften kun kan tilskrives tyngdekraften som Jorden udøver, kan vi sætte $\vec{F}_g = \vec{F}$ i Newtons anden lov og får

$$\vec{a} = -(m_g/m_I) \vec{\nabla} \Phi. \quad (5.3)$$

Det ses, at accelerationen forårsaget af tyngdekraften er den samme for alle legemer under antagelse af, at forholdet mellem den gravitationelle og inertielle masse er ens for alle legemer. Dette er igennem århundreder blevet eksperimentelt eftervist med stadig stigende præcision. Det svage ækvivalensprincip siger altså, at alle legemer falder med samme acceleration i et tyngdefelt uafhængig af deres masse, fordi den gravitationelle og inertielle masse er ens.

Lad os nu vende blikket mod det stærke ækvivalensprincip. For at forklare princippet vil vi lave et lille tankeeksperiment. Forestil dig, at du en nat bliver bortført af rumvæsener og vågner op næste morgen i et rumskib uden vinduer. Det er derfor ikke muligt for dig at se, hvor du befinder dig. I princippet kunne det jo være, at rumskibet endnu ikke var lettet og dermed stadig befandt sig på Jordens overflade. Du beslutter dig derfor for at afprøve, hvor du befinder dig ved hjælp af det eneste, du har til rådighed: Et æble. Du giver slip på æblet og måler, at det falder til gulvet med tyngdeaccelerationen $g = 9,82 \text{ m/s}^2$, og opfører sig altså som det ville gøre, hvis du var på Jordens overflade. Du ånder dermed lettet op og konkluderer, at rumskibet heldigvis stadig er parkeret på Jordens overflade. Er lettelsen begrundet? Nej, for der er faktisk et helt andet scenarie, der giver samme resultat. Forestil dig, at rumskibet i stedet befinder sig i det ydre rum langt fra legemer, der kan give dig og æblet tyngde, og accelererer uniformt med en acceleration \vec{a} , vis numeriske værdi netop svarer til tyngdeaccelerationen ved Jordens overflade, altså $9,82 \text{ m/s}^2$. Hvis denne acceleration peger i den modsatte retning, end den som Jorden trak i æblet, $\vec{a} = -\vec{g}$, og æblet nu frigives, vil du opfatte situationen, som om æblet falder på gulvet med tyngdeaccelerationen, som vist på figur 5.1. De to eksperimenter giver samme resultat, og det er dermed ikke muligt at skelne mellem dem. Det, vi altså kan konkludere, er, at en acceleration af referencerammen i en bestemt retning og et tyngdefelt, der virker i den modsatte retning, har samme effekt. Med andre ord er de to scenarier ækvivalente. Det ses altså, hvordan ønsket om at behandle ikke-inertielle referencesystemer fører til en teori for tyngdekraften.

Der er dog en vigtig begrænsning, der skal tages højde for. I den foregående diskussion var accelerationen uniform, hvilket medfører, at alle legemer føler den samme acceleration alle steder. For at eksperimentet på Jordoverfladen skal give samme resultat, skal tyngdepåvirkningen ligeledes være uniform. Men



Figur 5.1: Det stærke ækvivalensprincip. Til venstre falder æblet mod gulvet pga. Jordens tyngdefeltet. Til højre falder det mod gulvet, fordi Jordens tyngdefelt er erstattet af en acceleration af rumskibet i modsatte retning. De to scenarier er ækvivalente.

der findes ingen uniforme tyngdefelter i naturen! Tyngdekraften på et objekt peger i retningen af det legeme, der genererer feltet (tyngdekraften på æblet peger i retning af Jordens centrum) og denne kraft er forskellig alt afhængig af, hvor langt væk fra centrum æblet befinder sig. Vender vi tilbage til rumskibet på Jorden, så kan det ikke-uniforme tyngdefelt testes (i princippet) ved at anbringe to æbler i forskellige højder og frigive dem. De to æbler vil ikke falde lige hurtigt til Jorden, fordi det nederste æble er lidt tættere på Jordens centrum, og vil dermed påvirkes af en lidt større tyngdekraft og derfor accelerere lidt hurtigere end det andet æble. Disse effekter bliver dog kun betydelige over store afstande, og vi kan derfor antage, at vi *lokalt* kan approksimere tyngdepåvirkningen som værende uniform. Det faktum ødelægger altså ikke ækvivalensprincippet, men begrænser dens anvendelighed. Med den indsigt siger det stærke ækvivalensprincip, at accelerationen af en referenceramme i en bestemt retning, og et tyngdefelt, der virker i den modsatte retning, lokalt set har samme effekt. Udførelse af det samme eksperiment i begge situationer vil give identiske resultater.

Før vi går videre, kan vi nu forklare grunden til betegnelsen det “svage” og det “stærke” ækvivalensprincip: Det stærke ækvivalensprincip medfører det svage ækvivalensprincip. Vi kan kaste mere lys over det, ved igen at betragte æblet der falder til gulvet i det accelererende rumskib, men i stedet nu skifte til et system, der ikke befinder sig på rumskibet. Det kunne f.eks. være en observatør, der ser rumskibet komme susende forbi i det ydre rum. For denne observatør vil det, i modsætning til passageren, se ud som om det er rumskibets gulv, der accelererer op mod æblet med $9,82 \text{ m/s}^2$. For ham er det lige meget,

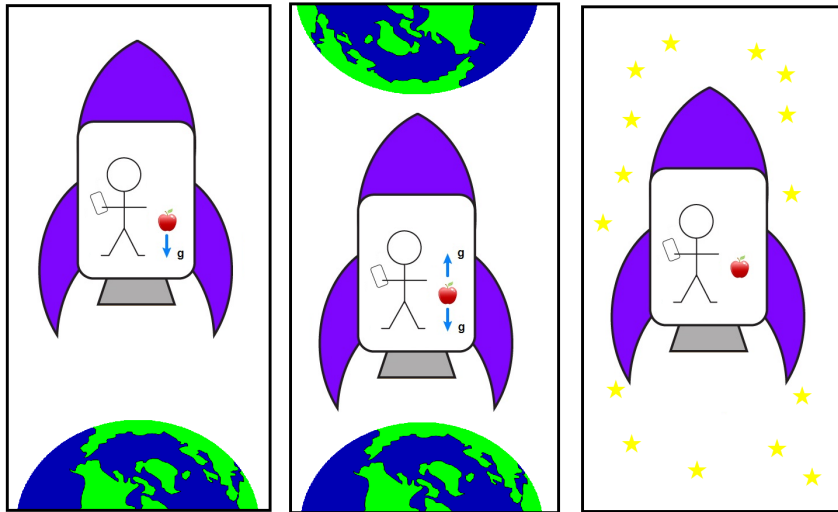
om det er et æble eller en kanonkugle, der bliver frigivet. Rumskibets gulv vil lige meget hvad accelerere op mod det frigivne objekt med $9,82 \text{ m/s}^2$. Nu kan vi så bruge ækvivalensprincippet (altså det stærke) den anden vej: Vi erstatter accelerationen med et tyngdefelt, der virker i modsatte retning, og nu har vi altså vist, at frit faldende objekters acceleration er uafhængig af deres masse. Hvis altså det stærke ækvivalensprincip gælder, må det svage ækvivalensprincip også gælde men ikke nødvendigvis omvendt.

Der findes en alternativ version af det stærke ækvivalensprincip, der omhandler referencerammer i frit fald. Det er historisk motiveret, fordi netop denne version af ækvivalensprincippet åbenbarede Einstein, og bliver ofte akkompagneret med et kendt citat fra hans tid på patentkontoret i Bern [16]: “Jeg sad i en stol på patentkontoret i Bern, hvor jeg pludselig fik en tanke: *Hvis en person falder frit, vil han ikke føle sin egen vægt.* Jeg var overrumplet. Denne enkle tanke gjorde et dybt indtryk på mig. Den drev mig mod en teori om gravitation.”

Vi kan nu nemt forklare, hvorfor en person i frit fald ikke føler sin egen vægt. Hvis rumskibet er i frit fald, vil både du, rumskibet og æblet blive accelereret lige meget, således at tyngdekraftens påvirkning inde i kabinen ikke kan detekteres. Relativt til rumskibet vil du og æblet bevare jeres positioner i forhold til hinanden, præcis ligesom de vil i det ikke-tyngdekraft-påvirkede ydre rum.

Vi kan også forklare ovenstående på en alternativ måde, ved igen at bruge ækvivalensprincippet. Vi beholder billedet af passageren i rumskibet og forestiller os nu, at motoren af en eller anden årsag er gået i stykker, og at rumskibet derfor falder frit med accelerationen \vec{g} forårsaget af Jordens tyngdefelt, som vist på figur 5.2. Vha. ækvivalensprincippet kan der udtænkes yderligere to scenarier, der alle giver samme resultat. Vi erstatter nu accelerationen af rumskibet med et tyngdefelt, der virker i den modsatte retning. For at dette tyngdefelt kan skabes, må der være et legeme over rumskibet. Denne masse vil skabe en kraft, der virker på rumskibet i den opadgående retning, og på den måde annullere den nedadrettede kraft på rumskibet og objekterne indeni, som Jorden jo skaber. For at det kan lade sig gøre, skal massen over rumskibet trække lige så meget som Jorden under: Der skal altså være en slags fiktiv Jord over. Det scenarie er selvfølgelig fuldstændig umuligt at realisere, så i stedet for at erstatte den nedadrettede acceleration med et legeme, kan vi jo også, i kraft af ækvivalensprincippet, erstatte Jorden (og den tyngde den skaber) med en opadrettet acceleration af rumskibet. På den måde bliver den totale acceleration lig nul, og rumskibet bevæger sig med konstant hastighed. Fordi acceleration er nul, og fordi der ingen legemer er til at skabe tyngde, vil passageren svæve frit, fordi ingen kræfter påvirker ham. Dette er helt ækvivalent med scenariet, hvor rumskibet er i det ydre rum langt væk fra nogle legemer, der kan skabe tyngde. Hvis observatøren nu stiller sig på en vægt for at blive vejret, vil den ikke vise noget: Han er vægtløs, fordi han ikke registrerer sin egen vekselvirkning med tyngdekraften. En frit faldende referenceramme er derfor ækvivalent med en referenceramme, der bevæger sig uden acceleration og uden tyngdekraft, og vi har dermed vist, at en person i frit fald ikke lokalt føler sin egen vægt.

I den generelle relativitetsteori spiller denne referenceramme samme rolle, som en inertiel ramme spiller i den specielle relativitetsteori. Der findes altså en referenceramme, hvori tyngdekraftens påvirkning kan transformeres væk, og



Figur 5.2: Til venstre er rumskibet i frit fald forårsaget af Jordens tyngdefelt. Midt for er rumskibets acceleration erstattet af en fiktiv Jord ovenover. Til højre befinder rumskibet sig i det ydre rum. De tre scenarier resulterer alle i vægtløshed.

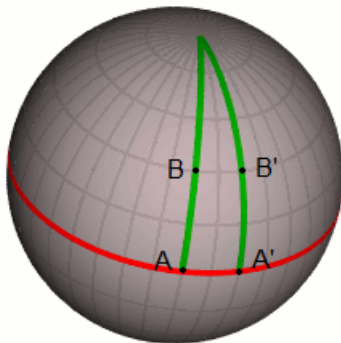
det kan derfor lokalt bruges som et inertialsystem. Fysikkens love er dermed de samme i alle lokalt frit faldende rammer. Selv i et tyngdefelt eksisterer der derfor en bestemt referenceramme, hvori fysikken fra den specielle relativitetsteori gælder. Vi kan altså konkludere, at et frit faldende system lokalt er ækvivalent med et inertialsystem i det tomme rum.

En moderne realisering af Einsteins tankeeksperiment kan i dag udføres af astronauter i kredsløb om Jorden i en rumfærge. Det kunne f.eks. være astronauter på den internationale rumstation ISS. Her er der faktisk også tale om frit fald, omend frit fald *rundt om* og ikke kun *mod* Jorden. Astronauterne vil opleve vægtløshed, og vil se objekter inde i færgen bevæge sig frit omkring. Ved at betragte disse objekters bevægelse kan de (i princippet) ikke lokalt afgøre, om de er i frit fald under indflydelse af Jordens tyngdefelt, eller om de er i hvile i det tomme rum langt væk fra planeter og lignende, der kan give dem tyngde.

5.2 Rummets krumning og Einsteins feltligninger

Nu har vi vist, hvordan ønsket om at behandle generelle referencesystemer fører til en teori for tyngdekraften. Men hvordan beskrives tyngdekraften rent matematisk, og hvordan adskiller den sig fra den velkendte Newtonske teori? Newtons tyngdelov, $\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi$, beskriver, at tilstedeværelsen af en masse producerer et tyngdefelt Φ , der skaber en kraft på andre partikler. Disse partiklers bevægelse kan udregnes vha. bevægelsesligningen $\vec{F} = m\vec{a}$. I modsætning til den Newtonske teori, der matematisk er ganske simpel, er den generelle relativitetsteori en geometrisk teori for tyngdekraften. Lad os illustrere dette med et passende, omend noget abstrakt, eksempel af Taylor og Wheeler [22].

To rejsende starter ud fra ækvator med 20 kilometers afstand, som vist på figur 5.3. Begge bevæger sig med samme fart stik nord langs en linje med kon-



Figur 5.3: De to rejsende ved ækvator, markeret med A og A', bevæger sig i den nordlige retning. Ved B og B' er de tættere på hinanden.

stant længdegrad. Når de rejsende har gået 200 km, er deres afstand mellem hinanden kun 19.9 km. I takt med at de fortsætter deres rejse, kommer de i stigende grad tættere på hinanden. Vi kan altså sige, at de accelererer hen imod hinanden. Fra et geometrisk synspunkt er de rejsende blot kraftfrie legemer der bevæger sig på såkaldte geodæter (analogien til en ret linje på en sfære). Deres tilsyneladende acceleration er en konsekvens af geometrien. Men vi kan også forklare dette på en anden måde. De rejsende er jo ikke klar over, at de befinder sig på en krum overflade. Med deres tro på Newtons love tilskriver de deres relative acceleration som værende grundet en mystisk kraft, der virker på dem. Eftersom kraften er uafhængig af de rejsendes komposition og masse, kan kraften identificeres som havende en gravitationel natur. De to forklaringer i form af gravitation og geometri må være ens, da de giver samme resultater, nemlig at de to rejsende accelererer hen mod hinanden. Den effekt, som en tiltrækkende tyngdekraft har, kan altså simuleres ved en krumning af geometrien. Konklusionen er, at gravitationelle effekter kan repræsenteres ved ændringer i rummets geometri, hvilket er essensen i den generelle relativitetsteori. Tyngdekraft og geometri er altså relaterede, og den generelle relativitetsteori beskriver, hvordan masse, der skaber tyngde, forvrænger rumtiden i dens omegn. Matematikken bag den generelle relativitetsteori, Einsteins feltligninger, beskriver netop forholdet mellem en massefordeling og dens krumning af rumtiden. I forhold til den Newtonske teori for tyngdekraften, siger Einstein altså, at hvis en masse placeres et bestemt sted, vil det føre til en krumning af rumtiden. En tom rumtid er derfor flad og har samme form som i den specielle relativitetsteori. Vil vil ikke begynde at udlede disse ligninger, men ud fra ovenstående indsigt om tyngdekraft og geometri kan vi redegøre for den overordnede form af ligningerne. Einsteins feltligninger kan skrives på formen

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Venstre side består af den såkaldte Ricci krumningstensor $R_{\mu\nu}$, Ricci skalaren R og metriktensoren $g_{\mu\nu}$. Som navnet antyder, beskriver venstre side rummets

krumning. Højre side består af den såkaldte stress-energi tensor $T_{\mu\nu}$, der beskriver fordelingen af masse og energi, hvilket altså får rumtiden til at krumme. Vi vil her fokusere på metriktensoren $g_{\mu\nu}$, da denne er en generalisering af Minkowski-metrikken (2.6), der som bekendt bruges til at definere rumtidsintervallet i den specielle relativitetsteori, dvs. i den flade rumtid. Husk på at Minkowski-metrikken "kun" består af fire komponenter. I tilstedeværelsen af masse er metrikken ikke mere den simple Minkowski-metrik for det tomme rum, men skal derimod erstattes med den mere generelle og komplicerede metrik $g_{\mu\nu}$, hvorfor rumtidsintervallet nu er givet ved

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5.5)$$

Sammenlignet med Minkowski-metrikken, der kun indeholder diagonale elementer $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, er den generelle metriktensor givet ved

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

hvor ingen af indgangene nødvendigvis er lig nul. Fordi tensoren er symmetrisk, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, er der 10 uafhængige komponenter, og vi kan derfor skrive rumtidsintervallet som

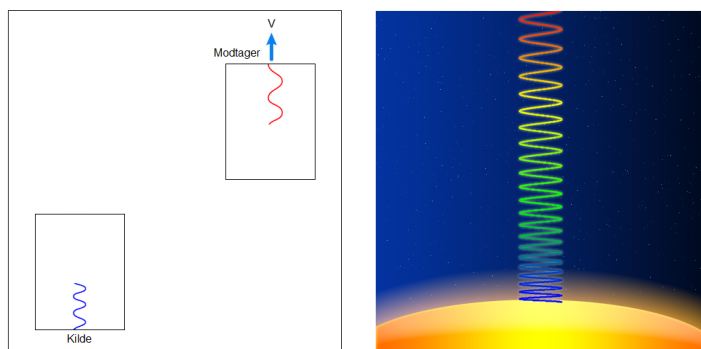
$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + \dots + 2g_{32}dx^2dx^3 + g_{33}(dx^3)^2. \quad (5.7)$$

Jeg vil senere vise, at man blot ved at bruge Lagrange-mekanik og korrespondensprincippet kan finde et udtryk for g_{00} i den Newtonske grænse, og hvordan den er relateret til tyngdepotentialet Φ . Derudover vil jeg vise, hvordan rumtidsintervallet ser ud, når vi har at gøre med tyngdefeltet udenfor en ikke-roterende, uladet sfærisk symmetrisk massefordeling, såsom en stjerne eller planet.

5.3 Gravitational rødforskydning og tidsforlængelse

For at forstå begivenhedshorisonter i et tyngdefelt skal vi vide noget om gravitationel rødforskydning og tidsforlængelse. Gravitational rødforskydning kan forklares på mange måder, og vi vil her bruge en tilgang baseret på det stærke ækvivalensprincip. Vi vil kigge på ændringen af frekvensen for lys i et accelererende referencesystem og bruge ækvivalensprincippet til at vise en tilsvarende effekt i et tyngdefelt. Vi betragter en accelererende referenceramme, f.eks. en elevator (der har længden L), hvor en kilde udsender lys i bunden af elevatoren med frekvensen ω_0 , og modtages efter noget tid i toppen af elevatoren med frekvensen ω . Fordi modtageren bevæger sig relativt til kilden (i dette tilfælde væk fra kilden), vil han måle en rødforskydning grundet Doppler-effekten for lys. Han vil altså modtage lys med en lavere frekvens end den, som kilden udsendte. Ifølge ækvivalensprincippet kan vi erstatte accelerationen af elevatoren med et tyngdefelt, der virker i modsatte retning, hvilket vil sige, at lyset bliver rødforskudt, når det bevæger sig væk fra et legeme. De to scenarier er vist på figur (5.4).

Lad os finde et matematisk udtryk for forskydningen. For at simplificere udregningen antager vi, at den relative hastighed V mellem kilde og modtager



Figur 5.4: Ifølge ækvivalensprincippet kan rødforskydning skyldes acceleration af en referenceramme (til venstre) eller et tyngdefelt virkende i modsatte retning (til højre).

er meget mindre en lysets hastighed, $V \ll c$, således at vi kan bruge Dopplerskiftet til første orden

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{V}{c}, \quad (5.8)$$

hvor $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Det negative fortegn i (5.8) er fordi vi betragter en modtager, der bevæger sig væk fra kilden, hvilket giver anledning til rødforskydning. Det modsatte, blåforskydning, giver et positivt fortegn. Med approksimation, $V \ll c$, når lyset fra bunden til toppen af elevatoren i løbet af tiden $t = L/c$. Dette er selvfølgelig en lidt grov approksimation, fordi vi på den måde ikke tager højde for, at afstanden, lyset skal rejse, jo faktisk er længere end L grundet accelerationen. Det overordnede resultat er dog det samme, hvorfor vi beholder approksimationen. Når lyset modtages, vil elevatoren have hastigheden $V = at = aL/c$, hvilket vi indsætter i (5.8)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{aL}{c^2}. \quad (5.9)$$

Ifølge ækvivalensprincippet gælder denne formel derfor også i et tyngdefelt, hvor a erstattes af en tyngdeacceleration, f.eks. tyngdeaccelerationskonstanten g , og L er afstanden fra det tyngdegivende legeme. Vi kan altså konkludere, at lyset bliver forskudt mod den røde del af spektret, når det bevæger sig i modsatte retning af et tyngdefelt, dvs. når det sendes opad i et tyngdefelt. Hvis modtageren derimod bevæger sig hen imod kilden, vil lyset blive blåforskydning.

Vi kan også forklare forskydningen ud fra energibevarelse, se f.eks. [24]. Kvantummet for elektromagnetisk stråling, fotonen, kan anskues som havende potentiel energi, når den er i et tyngdefelt. Når den flyttes opad i et tyngdefelt, og dermed øger sin potentielle energi, må det nødvendigvis ske på bekostning af dens kinetiske energi. Men da fotonen altid bevæger sig med lysets hastighed, kan den kun sænke dens kinetiske energi i form af dens frekvens, som er givet ud fra den kendte relation $E = \omega\hbar$.

Lad os opskrive (5.9) lidt mere generelt vha. tyngdepotentialet Φ . Ud fra den velkendte formel $E_{\text{pot}} = mgL$, hvor L er længden eller højden, kan vi se, at gL repræsenterer forskellen i gravitationel potentiel energi per masseenhed. Vi

kan altså skrive formelen for den gravitationelle rødforskydning mere generelt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2}, \quad (5.10)$$

hvor $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ og Φ_1 er potentialet i udsendelsespunktet, og Φ_2 er potentialet i modtagelsespunktet. En positiv værdi af $\Delta\Phi$ betyder rødforskydning og en negativ værdi blåforskydning. Udtrykket (5.10) ses ofte i litteraturen i en anden form, hvorfor vi omskriver til

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right). \quad (5.11)$$

Lad os betragte lyset der udsendes fra en stjerne og modtages på Jorden. Lyset bevæger sig modsat stjernens tyngdefelt og må derfor være rødforskudt, når det modtages på Jorden. Tyngdepotentialet udenfor en sfærisk massefordeling med massen M er givet ved $\Phi(r) = -GM/r$, hvor r er afstanden fra stjernens centrum. Potentialet Φ_1 er altså potentialet ved stjernens overflade R , så vi sætter $\Phi_1 = -GM/R$ og $\Phi_2 = 0$, da afstanden mellem stjernen og Jorden er meget større end R . Dermed kan vi skrive (5.11) som

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right). \quad (5.12)$$

Vi kan nu også nemt forklare, hvilken konsekvens gravitationel rødforskydning har for urets gang i et tyngdefelt. Her vil jeg bruge et tankeeksperiment fra kapitel 4 i [23]. Vi forestiller os en observatør, der står i bunden af Rundetårn og udsender lys med en bestemt frekvens i modsatte retning af Jordens tyngdefelt, og bliver målt af en observatør i toppen af Rundetårn. Modtageren i bunden (kilden) udsender lys med en bestemt frekvens, dvs. et bestemt antal bølgetoppe per sekund. Grundet den gravitationelle rødforskydning modtages lyset med en lavere frekvens, dvs. at et mindre antal bølgetoppe per sekund ankommer til modtageren, der jo er i hvile ift. kilden. Hvordan kan det egentlig lade sig gøre? Antallet af bølgetoppe, der udsendes og modtages, må nødvendigvis være det samme (hvor skulle de forsvinde hen?). Udsenderen og modtageren kan sammenligne frekvensen af lyset ved at måle, hvor mange bølgetoppe de registrerer over et bestemt aftalt tidsinterval, f.eks. et sekund. Fordi kilden og modtageren er i hvile relativt til hinanden, tilbagelægger alle bølgetoppe den samme afstand med den samme fart. Da der registreres færre bølgetoppe per sekund i toppen af Rundetårn end i bunden, kan det samlede antal bølgetoppe kun være det samme, hvis tiden mellem hver bølgetop, dvs. perioden er længere i toppen end i bunden. Uret i bunden går altså langsomt i forhold til uret i toppen. Vi kan dermed konkludere, at et ur tæt på et legeme går langsomt relativt til et ur, der er længere væk. Sagt på en anden måde: Et ur i et tyngdefelt går langsomt!

Lad mig sidst nævne et særligt grænsetilfælde af rødforskydning. Som nævnt rødforskydes lys, når det sendes opad i et tyngdefelt. Vi forestiller os nu et scenarie, hvor lyset bliver uendeligt rødforskudt. Det forudsætter altså et legeme, hvor tyngdekraften er så stærk, at det taber uendelig meget bevægelsesenergi. Men hvis lyset er uendeligt rødforskudt, vil modtageren slet ikke registrere noget lys. Husk på, at lys altid har den samme hastighed. Så den eneste måde, hvorpå modtageren ikke registrerer noget lys, er, hvis det ikke kan undslippe legemet. Dette er jo definitionen på et sort hul, som vi vil uddybe i næste afsnit.

Kapitel 6

Sorte huller

6.1 Schwarzschild-radius

Uden at begynde på at løse Einsteins feltligninger, kan vi allerede nu forklare, ved at anvende ækvivalensprincippet, hvorfor der optræder begivenhedshorisonter i et tyngdefelt. Faktisk kan vi komme frem til udtrykket for begivenhedshorizonten for et sort hul, den såkaldte Schwarzschild-radius, indenfor en faktor 2. Den følgende udledning er inspireret af [25].

Vi definerede Rindler-horizonten, som værende en afgrænsning i rumtiden, hinsides hvilken begivenheder umuligt kan påvirke den accelererende observatør. Denne afgrænsning er givet ved

$$R_0 = \frac{c^2}{\alpha}. \quad (6.1)$$

Vi tydeliggjorde Rindler-horizonten ved at betragte en partikel, der undergår uniform acceleration i et bestemt retning, og et lyssignal, der sendes mod partiklen. For at lave overgangen til den generelle relativitetsteori bruger vi nu ækvivalensprincippet. Vi ved altså, at acceleration af et referencesystem i en bestemt retning, og et tyngdefelt virkende i den modsatte retning lokalt har samme effekt. Begge scenarier skal give samme resultat, nemlig at der eksisterer en begivenhedshorizont. Derfor kan vi nu erstatte den accelererende observatør, eller rettere den accelererende observatørs referenceramme, med et tyngdefelt virkende i modsatte retning. Før kunne Rindler-observatøren tilskrive det faktum, at lyset ikke kunne nå ham, som værende grundet hans acceleration. Nu erstattes accelerationen derimod af et legeme, der skaber så meget tyngde, at lyset ikke kan nå ham, og begivenhedshorizonten skal altså i stedet tilskrives tyngdekraftens indvirkning. Men hvordan kan vi tale om, at det udsendte lys ikke kan nå observatøren, hvis han ikke accelererer? Hvis lys bliver udsendt fra et legeme, må det nødvendigvis nå observatøren efter en hvis tid. Den eneste måde vi kan forestille os, at lyset ikke når observatøren, må være hvis lyset simpelthen ikke kan undslippe legemet! Vi kan bruge dette som definitionen på et sort hul: Et legeme, hvor tyngdekraften er så stærk, at selv ikke lys kan undslippe!

Lad os formulere begivenhedshorizonten mere matematisk. Ifølge ækvivalensprincippet kan vi sætte $\alpha = -g$ i (6.1) og får dermed

$$R_0 = -\frac{c^2}{g}. \quad (6.2)$$

Hvis vi betragter et legeme med massen M og radius R , der forårsager tyngdeaccelerationen

$$g = \frac{-GM}{R^2}, \quad (6.3)$$

i afstanden R fra centrum, kan vi skrive horisonten som

$$R_0 = \frac{c^2 R^2}{GM}. \quad (6.4)$$

Vi kan altså se, at et massivt objekt kan have en begivenhedshorisont, der afhænger af massen M og radius R . Betragter vi et objekt, der netop har en begivenhedshorisont ved sin overflade, kan vi sætte $R = R_0$ i (6.4) og få

$$R = \frac{GM}{c^2}. \quad (6.5)$$

Det korrekte udtryk for begivenhedshorisonten, der kan udledes i den generelle relativitetsteori, indeholder en faktor 2 i forhold til ovenstående udtryk

$$\boxed{R_s = \frac{2GM}{c^2}}, \quad (6.6)$$

og kaldes Schwarzschild-radien, eller Schwarzschild-horisonten. Lad os kigge lidt nærmere på den fysiske fortolkning af denne horisont og sammenligne den med Rindler-horisonten. Rindler-horisonten er en afstand i den flade rumtid, hinsides hvilken begivenheder umuligt kan påvirke den accelererende observatør. Specifikt er der tale om det forspring, den accelererende observatør som *minimum* skal have, hvis han skal kunne undslippe lyset. Den fysiske fortolkning af Schwarzschild-horisonten er derimod radius af legemet givet ved (6.6). Vi kan altså sige, at det er radius af en kugle, der opfylder, at hvis alt legemets masse komprimeres indenfor denne kugle, vil tyngdepåvirkningen være så stærk, at selv ikke lys kan undslippe. En anden forskel på Rindler- og Schwarzschild-horisonten kan findes i selve definitionen af ækvivalensprincippet. Husk på at vi erstatter accelerationen af en referenceramme med et tyngdefelt virkende i modsatte retning, hvilket matematisk kommer til udtryk ved fortegnet i $\alpha = -g$. Schwarzschild-radien er altså den *maksimale* udstrækning et legeme skal have, før det kan være et sort hul. Et legeme, der har en udstrækning givet ved dens Schwarzschild-radius, vil der ikke kunne udsendes lys fra, og der vil ikke kunne foretages kommunikation med en observatør, der befinder sig indenfor legemets Schwarzschild-radius.

Med udtrykket for denne radius kan vi nu nemt svare på, hvorfor Jorden og Solen ikke er sorte huller. Indsættes deres masse i (6.6), fås at deres Schwarzschild-radius er henholdsvis $R_{s,\oplus} = 9$ mm og $R_{s,\odot} = 3$ km, hvilket vil sige langt mindre end deres faktiske radier. Hvis deres masse derimod komprimeres ned til en sfære med disse radier, vil de blive sorte huller! Et sort hul er altså et legeme, hvis masse er komprimeret ned til dens egen Schwarzschild-radius.

Vi kan få en bedre forståelse af Schwarzschild-horisonten og sorte huller, ved at kigge på hvordan sorte huller rent faktisk opstår i universet. Teorier for denne opståen er der mange af, men jeg vil her nævne, hvordan stjerner kan omdannes til sorte huller. Dette er gennemgået i mange lærebøger, se f.eks. kapitel 12 i [8]. De første stjerner i universet blev dannet ved gravitationel kollaps

af en interstellar gas af brint og ${}^4\text{He}$. Når gasskyen kolliderer, stiger de individuelle atomkernes energi på bekostning af den potentielle energi, hvormed gassens temperatur stiger. Hvis denne temperatur bliver tilstrækkelig høj, kan brint fusionere til helium, hvilket frigiver energi. På denne måde når stjernen et stadie, hvor den frigivne energi ved brint-forbrændingen balancerer det gravitationelle kollaps, og der opstår på den måde en dynamisk ligevægt. Eksempelvis befinder vores egen sol sig på dette stadie. Når det meste af brinten er opbrugt, er der derfor ikke nok energi til at opretholde ligevægten, og det gravitationelle kollaps fortsætter. Det vil igen få temperaturen til at stige, således at helium nu kan fusionere f.eks. til kulstof. Når heliummet er brugt op, bliver ligevægten igen forstyrret, og stjernen kolliderer igen under dens egen tyngdekraft, således at et nyt stadie af kernefusion kan foregå. Denne rutine kan, under de rette betingelser, fortsætte indtil ${}^{56}\text{Fe}$, der har den højeste bindingsenergi per nukleon. Dette betyder, at det ikke er energimæssigt favorabelt at fusionere jern eller andre kerner med nukleontal i omegnen af 60. Der er nu to muligheder, når en stjerne så at sige har opbrugt dens brændstof. Enten kan den nå en ligevægtstilstand, hvor gravitationel kollaps modvirkes af et ikke-termisk tryk (f.eks. Fermi-trykket for elektroner grundet Paulis udelukkelsesprincip), eller også når stjernen aldrig en ligevægtstilstand og fortsætter i stedet med at kollapse pga. tyngdekraften. Vi vil ikke foretage en detaljeret gennemgang af det sidstnævnte scenarie, se i stedet [15], men blot konkludere, at dette stadigt fortsatte kollaps i sidste ende kan danne et sort hul, hvilket vil sige, at stjernen kolliderer til dens Schwarzschild-radius.

Det var et lille sidespring, men vi vil nu bruge ideen om det gravitationelle kollaps til at få en dybere forståelse af Schwarzschild-horisonten.

6.2 Schwarzschild-horisonten

I forbindelse med Rindler-horisonten, kiggede vi på en accelererende observatør, en frakoblet observatør og deres indbyrdes kommunikation i form af lyssignaler. Vi vil nu forestille os et tænkt scenarie med en indfaldende observatør, der følger en stjernes kollaps ind mod dens Schwarzschild-radius, dvs. dens kollaps mod et sort hul, samt en ekstern observatør, der observerer processen fra en bestemt afstand fra Schwarzschild-horisonten og er i hvile relativt til den indfaldende. Rent grafisk kan dette afbildes på præcis samme måde som Rindler-horisonten, som vi viste på figur 3.8 og figur 3.9, men nu er den fysiske fortolkning af hyperblen altså ikke en observatør, der undergår uniform acceleration men derimod, i kraft af ækvivalensprincippet, en observatør i et tyngdefelt (den eksterne observatør). Jo tættere observatøren er fra det sorte hul, desto større indvirkning har tyngdekraften, og desto mere krummer hyperblen. Den rette linje tangent til hyperblen, er nu ikke en observatør der bliver frakoblet fra den accelererende, men derimod en observatør der følger stjernens gravitationelle kollaps mod et sort hul. Fælles for begge er, at de falder ind mod henholdsvis Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten. Husk på, at ækvivalensprincippet siger, at en frit faldende referenceramme er en referenceramme, hvori tyngdekraftens påvirkning kan transformeres væk. Denne referenceramme spiller altså samme rolle, som en inertiel referenceramme spiller i den specielle relativitetsteori. Det er en yderligere forklaring af det faktum, at den frakoblede observatør og den indfaldende observatør skal afbildes på samme måde i

forbindelse med Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten. Lyssignalet, som i Rindler-kilen grafisk afbildes ved en ret linje med en hældning på 45° , afbildes på præcis samme måde i forbindelse med Schwarzschild-horisonten.

For at afbilde Schwarzschild-horisonten, skal den accelererende observatør altså erstattes med den eksterne observatør, og den frakoblede observatør med en indfaldende observatør. Tabel 6.1 opsummerer denne overgang. Når det-

	Rindler	Schwarzschild
Hyperbel	Accelererende observatør	Ekstern observatør i et tyngdefelt
Ret linje tangent til hyperbel	Observatør frakoblet fra accelerationsmekanismen	Indfaldende observatør i et tyngdefelt
Ret linje 45°	Lyssignal	Lyssignal
Asymptoten til hyperblen	Begivenhedshorisonten R_0	Begivenhedshorisonten R_s

Tabel 6.1: Grafisk og fysisk fortolkning af Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten.

te indses, er analogien fuldendt. De to observatører, den indfaldende og den eksterne, har samme forhold til horisonten, som henholdsvis den frakoblede og den accelererende observatør. Hvis de to kommunikerer ved på forhånd at aftale, at de vil sende lyssignaler til hinanden f.eks. hvert sekund, opstår Schwarzschild-horisonten per analogi på samme måde som Rindler-horisonten. For den indfaldende observatør sker der ikke noget nævneværdigt ved horisonten. Han vil i løbet af en endelig egentid passere horisonten og vil stadig kunne modtage lys fra den eksterne observatør. Til gengæld ser den eksterne observatør noget ganske anderledes, når den indfaldende observatør nærmer sig Schwarzschild-horisonten. Husk på, at lys ikke kan undslippe fra et legeme, hvis udstrækning er givet ved (6.6), og når den indfaldende observatør krydser Schwarzschild-horisonten, vil den eksterne observatør derfor ikke kunne modtage lyset.

Nu kan vi bruge gravitationel rødforskydning og tidsforlængelse, til at forklare mere præcist, hvad den eksterne observatør ser. Fordi lys bliver rødforskydt, når det rejser modsat et tyngdefelt, vil den eksterne altså se den indfaldende observatør blive mere og mere rødforskydt, jo tættere på horisonten han kommer. Derudover, fordi et ur i et tyngdefelt går langsomt, vil han se den indfaldendes ur gå langsommere og langsommere. Der bliver altså længere og længere mellem lyssignalerne målt med den eksterne observatørs ur. Det betyder, at den indfaldendes rejse vil, set udefra, gå langsommere og langsommere. Dette kulminerer ved horisonten, hvor det for den eksterne observatør ser ud som om tiden går i stå, og at den indfaldende observatør derfor bruger uendelig lang tid på at krydse den, og bliver uendelig rødforskydt. Han ser altså aldrig den frakoblede observatør passere horisonten.

I tilfældet med Rindler-kilen, bunder singulariteten i, at vi skifter til koordinater, der beskriver en uniformt accelererende observatør. Det blev tydeligt, da vi diskuterede Rindler-horisonten set fra den accelererende observatørs referencesystem og den frakoblede observatørs referencesystem og kom frem til at den frakoblede observatør netop ikke tillægger passagen af horisonten nogen værdi. Det samme gør sig gældende for Schwarzschild-horisonten. Det bunder blot i vores valg af koordinater, der beskriver en ekstern observatørs bevægelse

i et tyngdefelt. Fordi de observatører, den indfaldende og den eksterne, har altså samme forhold til horisonten, som henholdsvis den frakoblede og den accelererende observatør, har vi på den måde svaret på, måske lidt abstrakt, at Schwarzschild-horisonten er en koordinatsingularitet.

Men hvad sker der, når den indfaldende observatør har passeret horisonten, og fortsætter sit indfald ind mod centrum af det sorte hul? Det kan vi ikke svare på med vores nuværende viden. Men vi vil i det følgende formulere sorte huller og Schwarzschild-horisonten på et mere stringent matematisk grundlag, der underbygger den forhenværende diskussion, som kun beror sig på den specielle relativitetsteori og ækvivalensprincippet. Derudover vil vi kunne forklare, hvad der sker med den indfaldende observatør efter passagen af horisonten.

Kapitel 7

Svagfelts-approximation til den generelle relativitetsteori

For at lette overgangen til den generelle relativitetsteori, og for at få en bedre forståelse for den matematik der optræder, vil vi nu kigge på den såkaldte svagfelts-approximation, dvs. approksimation til den generelle relativitetsteori, når tyngdefeltet er svagt. Det følgende er mere eller mindre en oversættelse af kapitel 2 og 10 i Landau og Lifshitzs klassiker “The Classical Theory of Fields” [12].

Den klassiske analytiske mekanik er bygget op omkring mindstevirkningsprincippet, der siger, at en partikel bevæger sig langs en kurve mellem to punkter 1 og 2 i et givet tidsinterval, t_1 og t_2 , der opfylder at virkningsintegralet

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (7.1)$$

er et ekstremum langs denne kurve. Her betegner L Lagrange-funktionen $L = T - V$, hvor T er den kinetiske energi og V den potentielle energi. Det kan på tilsvarende vis formuleres ved, at partikler bevæger sig langs kurver med forsvindende variation af virkningsintegralet, og mindstevirkningsprincippet kan dermed skrives på den kompakte form $\delta S = 0$. Ud fra den forsvindende variation af virkningsintegralet kan man udlede Euler-Lagrange ligningerne

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (7.2)$$

der er bevægelsesligningerne i Lagrange-mekanikken. Det fremgår tydeligt, at dette er ikke-relativistisk, fordi vi adskiller tid og rum i formuleringen af mindstevirkningsprincippet. For at lave relativistiske udregninger, bliver vi nødt til at udtrykke virkningen S vha. relativistiske invarianter, hvorfor vi skriver den på formen

$$S = -\varepsilon \int_a^b ds. \quad (7.3)$$

Dette er et integral langs partiklens verdenslinje mellem to tidsligt separerede verdenspunkter a og b . Når vi på denne måde bruger rumtidsintervallet ds , sikrer vi os, at virkningsintegralet er Lorentz-invariant. Konstanten ε kan findes ud fra korrespondensprincippet, der siger, at virkningen S skal have den klassiske form i den ikke-relativistiske grænse.

For en fri partikel i klassisk mekanik, ved vi, at Lagrange-funktionen er givet ved udtrykket for den kinetiske energi $L = mv^2/2$. For at finde det relativistisk korrekte udtryk for Lagrange-funktionen, kombinerer vi (2.8) og (2.11), hvormed vi får $ds = cdt/\gamma$. Det kan vi indsætte i (7.3):

$$S = -\varepsilon c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (7.4)$$

Ved at sammenligne med (7.1), ses at Lagrange-funktionen må have formen

$$L = -\varepsilon c \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.5)$$

Vi finder nu Lagrange-funktionen i den ikke-relativistiske grænse $v \ll c$

$$L \xrightarrow{v \ll c} \frac{mv^2}{2}, \quad (7.6)$$

ved at Taylor-udvikle (7.5) til 1. orden:

$$L = -\varepsilon c \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx -\varepsilon c + \frac{\varepsilon v^2}{2c}. \quad (7.7)$$

Vælger vi $\varepsilon = mc$, fås

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (7.8)$$

Det konstante led, $-mc^2$, påvirker ikke virkningen og dermed ikke bevægelsesligningen, hvorfor (7.8) er i overensstemmelse med korrespondensprincippet udtrykt ved (7.6). Indsættes $\varepsilon = mc$ i (7.5) og (7.3) fås det endelige udtryk for virkningen og Lagrange-funktionen

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (7.9)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.10)$$

Betragter vi en partikels bevægelse i et tyngdefelt, skal vi modificere (7.8) til

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\Phi, \quad (7.11)$$

hvor Φ er tyngdepotentialet. Virkningen for en partikel i et tyngdefelt er derfor givet ved

$$S = \int dt \left(\frac{mv^2}{2} - m\Phi - mc^2 \right) \quad (7.12)$$

$$= -mc \int dt \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right). \quad (7.13)$$

Sammenligner vi med (7.9), ses at rumtidsintervallet ds må være givet ved

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c} \right) dt. \quad (7.14)$$

Kvadrerer vi udtrykket og negligerer led, der forsvinder i grænsen $c \rightarrow \infty$, fås

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (7.15)$$

hvor vi har udnyttet at $v dt = dx$. Det ses altså, at i den ikke-relativistiske (eller Newtonske) grænse af den generelle relativitetsteori, kan indgangen g_{00} i metriktensoren approksimeres med

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (7.16)$$

Indsættes $\Phi = -GM/r$, der som bekendt er tyngdepotentialet for en legeme i en afstand r fra dens centrum, fås

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (7.17)$$

Vi har altså udregnet, hvorledes indgangen g_{00} i metriktensoren $g_{\mu\nu}$, der jo karakteriserer det generelle rumtidsinterval, er relateret til det ikke-relativistiske tyngdepotentiale Φ . Udtrykket (7.17) er en forudsætning for vores mere matematisk stringente forståelse af sorte huller, som vi skal se i næste afsnit.

Kapitel 8

Schwarzschild-metrikken

Nu er vi udstyret med alle redskaberne til at forstå, hvordan Schwarzschild-metrikken er givet. Denne metrik beskriver som nævnt tyngdefeltet udenfor en ikke-roterende, ikke-ladet sfærisk symmetrisk massefordeling, såsom en stjerne eller planet. Udover den sfæriske symmetri antager vi også at, massefordelingen er statisk, altså at den ikke ændrer sig i tid. Rent matematisk er Schwarzschild-metrikken altså en statisk, sfærisk symmetrisk løsning til Einsteins feltligninger i vakuum. Vi kan derfor skrive ligningerne (5.4) som $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$. Vi vil nu vise, hvorledes vi kan sandsynliggøre metrikken ved at bruge de redskaber, vi allerede har samt symmetribetragtninger.

Vi starter med at tage udgangspunkt i den velkendte Minkowski-metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (8.1)$$

Da den ønskede metrik skal beskrive tyngdefeltet udenfor et objekt der er sfærisk symmetrisk, skifter vi til koordinater særligt egnede til dette, nemlig sfæriske polære koordinater

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Udregnes differentialerne af (8.2), hvoraf f.eks. $dz = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta$, og indsættes i (8.1) fås

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ ds^2 &= c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (8.3)$$

hvor $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ er det velkendte linjeelement for en todimensionel enhedssfære. Grundet antagelsen om sfærisk symmetri bliver Schwarzschild-metrikken nødt til at indeholde det kuglesymmetriske led $r^2 d\Omega^2$. Det er klart, at de to metrikker (8.1) og (8.3) beskriver præcis den samme fysik, den flade rumtid, men ved at bruge en simpel symmetribetragtning, ved vi nu noget om, hvordan den ønskede Schwarzschild-metrik skal se ud. Lad os nu kigge på antagelsen om den statiske massefordeling. Det må nødvendigvis medføre, at metrikken skal være uafhængig af tidskoordinaten t , og derfor være invariant under tidsinverteringen $t \rightarrow -t$. Metrikken må derfor ikke indeholde krydsled

såsom $dx^i dt$ eller $dt dx^i$. Vi har nu simplificeret metrikken betydeligt, og kan skrive den på formen

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (8.4)$$

hvor $A(r)$ og $B(r)$ er to ikke nødvendigvis ens koefficienter, der kun afhænger af r . Uden at bestemme dem endnu kan vi allerede sige noget om deres grænseværdier. Når vi bevæger os uendeligt langt væk fra det gravitationelle objekt, $r \rightarrow \infty$, må rumtiden nødvendigvis være den samme som for den flade rumtid. Det samme må gælde om grænsen $M \rightarrow 0$: Vi får samme resultat, om vi går uendelig langt væk fra legemet, eller om legemets masse bliver nul. Ved at sammenligne (8.4) med (8.3), kan vi se, at der må gælde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1, \quad (8.5)$$

således at Schwarzschild-metrikken i denne grænse bliver Minkowski-metrikken (i sfæriske koordinater). For at finde den specifikke form af $A(r)$ og $B(r)$, og hvordan de er relateret til hinanden, kræver det, at vi løser Einsteins feltligninger i vakuum. Det vil vi ikke gøre her, men i stedet henvise til Bilag A, hvor vi viser det eksplicit. Resultatet er, at $A(r) = B(r)^{-1} = 1 - r_s/r$, hvor r_s er en integrationskonstant. Indsættes de to udtryk fås

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.6)$$

Integrationskonstanten kan findes ud fra, at metrikken i svagfeltsgrænsen som bekendt skal have formen $g_{00} = 1 - 2GM/c^2 r$. Laver vi en rækkeudvikling for $r \rightarrow \infty$ fås

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.7)$$

Ud fra det ses direkte, at konstanten r_s må være givet ved $r_s = 2GM/c^2$, således at Schwarzschild-metrikken i dens endelige form bliver

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (8.8)$$

For at lette notation skifter vi til enheder hvor $c = G = 1$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.9)$$

Vi kan ligeledes opskrive selve metrikken $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 - 2M/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - 2M/r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (8.10)$$

Ud fra (8.9) og (8.10) kan vi se, at i grænsen $r \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow 0$) fås som forventet Minkowski-metrikken i sfæriske koordinater (8.3).

Vi kan ud fra Schwarzschild-metrikken nemt identificere de omtalte singulariteter, som der optræder. Det er tydeligt, at der sker noget pudsigt med metrikken ved $r = 2M$ og $r = 0$. Når $r \rightarrow 2M$ medfører det, at $g_{00} \rightarrow 0$ og

$g_{11} \rightarrow -\infty$. Hvis derimod $r \rightarrow 0$ medfører det, at $g_{00} \rightarrow -\infty$ og $g_{11} \rightarrow 0$. Jeg vil starte med at fokusere på singulariteten $r = 2M$, der jo er Schwarzschild-horisonten. Vi har allerede redegjort for den fysiske fortolkning af denne horisont, og hvorfor der optræder en koordinat-singularitet. I det følgende vil vi underbygge det på et mere stringent matematisk grundlag. Mht. singulariteten $r = 0$ viser det sig, at denne er en såkaldt gravitationel singularitet, som vi vender tilbage til senere.

8.1 Tidsforlængelse og rødforskydning igen

Inden vi går videre med singulariteterne vil vi med udgangspunkt i Schwarzschild-metrikken udlede de korrekte udtryk for gravitationel rødforskydning og gravitationel tidsforlængelse.

Vi ved fra (2.8), at egentiden er givet ved rumtidsintervallet mellem to begivenheder, der sker samme sted, dvs. hvor $d\vec{x} = 0$

$$ds^2 = d\tau^2, \quad (8.11)$$

og at udtrykket for rumtidsintervallet i den generelle relativitetsteori er givet ved

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8.12)$$

Sættes $d\vec{x} = 0$ i dette udtryk får vi

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (8.13)$$

fordi alle rum-komponenterne i summen giver nul, og det dermed kun er tids-komponenten, der overlever. Indsætter vi $g_{00} = 1 - 2M/r$ fås

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt, \quad (8.14)$$

hvilket repræsenterer urets gang i et tyngdefelt. Tidsintervallet $d\tau$ er tidsintervallet målt for en observatør i tyngdefeltet og tidsintervallet dt er tidsintervallet, der måles for en observatør uendeligt langt fra tyngdefeltets kilde. Det kan ses ved at kigge på grænsetilfældet, hvor $r \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow 0$), hvilket giver $d\tau = dt$. Hvis altså begge observatører er uendeligt langt væk fra tyngdefeltet, vil deres opfattelse af tid være ens. Vi kan gøre det tydeligt med et lille eksempel. Indsætter vi $r = 3M$ fås $d\tau \approx 0.6 dt$, hvilket vil sige $d\tau < dt$. Tidsintervallet set for observatøren uendeligt langt væk fra tyngdefeltet, dt , er altså længere end $d\tau$, og når tidsintervallet er længere, går uret dermed langsommere: Et ur i et tyngdefelt går langsomt set for en observatør udefra. Det konkluderede vi også vha. ækvivalensprincippet, og formelen (8.14) er den matematiske manifestation af dette faktum. Vi kunne også have opnået samme resultat mere direkte fra Schwarzschild-metrikken, ved at sætte $dr = d\theta = d\phi = 0$ i (8.9), fordi vi på den måler rumtidsintervallet, når vinkler (θ, ϕ) og den radiale afstand r holdes konstanten, hvilket netop er egentiden.

Ud fra tidsforlængelsen kan vi også finde udtrykket for den gravitationelle rødforskydning, fordi tidsintervallet helt generelt er omvendt proportional med frekvensen. Tager vi derfor den inverse af (8.14) og omroterer får vi

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}. \quad (8.15)$$

For $r \rightarrow \infty$ kan vi rækkeudvikle kvadratroden i (8.15), $\sqrt{1 - 2M/r} \approx 1 - M/r$, og får dermed

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{M}{r} \right), \quad (8.16)$$

hvilket er udtrykket, vi fandt vha. ækvivalensprincippet (5.12) blot i enhederne $c = G = 1$.

8.2 Nær-horisont-approximationen

For at få en dybere forståelse af begivenhedshorisonten vil vi vise, hvordan Schwarzschild-metrikken ser ud omkring $r = 2M$. Faktisk viser det sig, at Schwarzschild-metrikken har samme form som Rindler-metrikken omkring horisonten. Da dette er centralt for vores forståelse af Schwarzschild-horisonten, vil vi gennemgå matematikken i detalje. Lad mig starte med at lave en simpel omskrivning af (8.9)

$$ds^2 = \left(\frac{r - 2M}{r} \right) dt^2 - \left(\frac{r - 2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (8.17)$$

Absolut ingenting er ændret mht. fysikken, vi har bare forlænget de to brøker i metrikken. Men vi kan nu se, at den egner sig bedre til at beskrive fysikken omkring horisonten, fordi udtrykket $r - 2M$ netop måler koordinatafstanden r fra horisonten. Lad os igennem denne gennemgang negligere den sfæriske del $r^2 d\Omega^2$ af metrikken, således at (θ, ϕ) holdes konstante. For at lette udregningerne udtrykker vi metrikken vha. $\tilde{r} \equiv r - 2M$ således at

$$ds^2 = \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r} + 2M} \right) dt^2 - \left(\frac{\tilde{r} + 2M}{\tilde{r}} \right) dr^2. \quad (8.18)$$

Nær horisonten er $r \approx 2M$, hvilket medfører, at $\tilde{r} \ll 2M$, og vi kan derfor rækkeudvikle de to brøker

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{r} + 2M} \approx \frac{\tilde{r}}{2M} \quad (8.19)$$

$$\frac{\tilde{r} + 2M}{\tilde{r}} \approx \frac{2M}{\tilde{r}}. \quad (8.20)$$

Derfor er metrikken (8.18) nu approksimativt givet ved

$$ds^2 \approx \frac{\tilde{r}}{2M} dt^2 - \frac{2M}{\tilde{r}} dr^2 \quad (8.21)$$

Nu er vi egentligt i mål og skal blot omformulere udtrykket, så det bliver tydeligt, at det har samme form som Rindler-metrikken. For at komme videre vil vi, i stil med måden hvorpå vi kom frem til (8.14), tage udgangspunkt i Schwarzschild-metrikken men nu sætte $dt = d\theta = d\phi = 0$. Denne nye størrelse, som vi vil betegne $d\rho^2$, er derfor givet ved

$$d\rho^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 = \left(\frac{\tilde{r} + 2M}{\tilde{r}} \right) dr^2. \quad (8.22)$$

På samme måde, som (8.14) betegnes egentiden, vil vi kalde (8.22) for egenafstanden, fordi den netop repræsenterer den radiale afstand, der måles, når

vinklerne (θ, ϕ) og tiden t holdes konstante. For at finde ρ laver vi en integration, og fordi vi arbejder omkring horisonten $r = 2M$, er den givet ved

$$\rho = \int_{2M}^r \left(\frac{\tilde{r} + 2M}{\tilde{r}} \right)^{1/2} d\tilde{r}. \quad (8.23)$$

Men da vi kun er interesserede i området lige omkring horisonten, er det derfor tilstrækkeligt at indsætte approksimationen (8.20) således, at

$$\rho \approx \int_{2M}^r d\tilde{r} \sqrt{\frac{2M}{\tilde{r}}} \quad (8.24)$$

Dette integral kan nemt løses og giver $\rho = \sqrt{8M\tilde{r}}$. Udtrykker vi nu (8.21) vha. ρ og $d\rho$ fås

$$ds^2 = \frac{1}{16M^2} \rho^2 dt^2 - d\rho^2 \quad (8.25)$$

Til sidst omskalerer vi tiden t til $\zeta = t/4M$, således at metrikken er givet ved

$$ds^2 = \rho^2 d\zeta^2 - d\rho^2. \quad (8.26)$$

Denne metrik har umiddelbart samme form som Rindler-metrikken (3.21). Lad os for en god ordens skyld skrive den op igen for at sammenligne

$$ds^2 = X^2 dT^2 - dX^2.$$

Vi kan altså se, at $\zeta = t/4M$ repræsenterer en tidskoordinat, og $\rho = \sqrt{8M\tilde{r}}$ repræsenterer en positionskoordinat. Metrikken (8.26) har præcis samme form som Rindler-metrikken! Nu har vi vist, at det også er matematisk forsvarligt at bruge Rindler-kilens geometri til at forklare aspekter af sorte huller omkring horisonten. Vi kan også anskue det faktum, at Rindler-metrikken og Schwarzschild-metrikken *nær horisonten* har samme form, som en yderligere bekræftelse af, at der optræder en koordinatsingularitet ved Schwarzschild-horisonten $r = 2M$, fordi der netop optræder en ved Rindler-horisonten.

Når vi nu er bekendt med Rindler-kilen og Rindler-koordinater, ville det være nyttigt, hvis vi kunne finde nogle koordinater, der rent geometrisk minder om disse, men vis anvendelighed ikke kun er begrænset til omegnen af Schwarzschild-horisonten. Det viser sig, at der rent faktisk findes sådanne koordinater, som vi nu skal se.

Kapitel 9

Kruskal-koordinater

9.1 Relation til Schwarzschild-koordinater

Vi er på udgik efter koordinater, der kan beskrive sorte huller fuldt ud, men som også minder matematisk om Rindler-koordinaterne. F.eks. vil vi gerne have, at lyssignaler altid kan afbildes som et ret linje med en hældning på 45° , og en observatør i et tyngdefelt som en hyperbel. I kapitel 6 har vi allerede redegjort for, via ækvivalensprincippet, at der må være denne lighed mellem afbildningen af Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten, som vi opsummerede i tabel 6.1. Nu vil vi vise matematisk, at det rent faktisk forholder sig sådan. Hvorfor ikke bruge Schwarzschild-koordinaterne (t, r, θ, ϕ) til det formål? Lad os se, hvordan f.eks. lyskegler opfører sig i disse koordinater. For en lyskegle er rumtidsintervallet lysligt, $ds^2 = 0$, som forklaret i kapitel 2. For en *radial* lyskegle, må det ligeledes gælde, at $d\phi = d\theta = 0$. Indsættes det i Schwarzschild-metrikken, givet ved (8.9), fås

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (9.1)$$

Omrokerer vi fås, at

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (9.2)$$

hvilket bestemt ikke er en ret linje! Tværtimod ses det, at lyskeglen lukker sig sammen, når vi nærmer os $r = 2M$. Derudover skifter fortegnet også, når horisonten krydses, dvs. når $r < 2M$. Andre koordinater skal derfor findes, hvilket den amerikanske fysiker Martin Kruskal gjorde i 1959 [11]. Vi betegner de nye Kruskal-koordinater U og V . I takt med de ovenstående krav opstiller vi derfor en ny metrik, Kruskal-metrikken, som netop skal opfylde, at lysstråler alle steder har hældningen 45° . Denne metrik er givet ved

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} (dV^2 - dU^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (9.3)$$

hvor den sfærisk del $r^2 d\Omega^2$ er den samme som for Schwarzschild-metrikken. Kruskal-kordinaterne er givet ved

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \end{aligned} \quad (9.4)$$

og repræsenterer altså en koordinattransformation fra Kruskal-metrikken (9.3) til Schwarzschildmetrikken (8.9), hvilket vises i bilag B. Vi kan direkte se, at radiale lyskurver opfører sig som forventet. Indsættes $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$ i (9.3), fås $dV/dU = \pm 1$ hvilket giver

$$V = \pm U + \text{konstant}, \quad (9.5)$$

og repræsenterer en ret linje i en U-V-graf med hældningen 45° , præcis som i Rindler-kilen og Minkowski-diagrammet. Vi kan få mere indsigt i metrikken ved at kigge på, hvordan Schwarzschild-kordinaterne (t, r) kan udtrykkes vha. Kruskal-kordinaterne (U, V)

$$U^2 - V^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \quad (9.6)$$

$$\frac{V}{U} = \tanh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (9.7)$$

Ligningerne (9.6) og (9.7) repræsenterer transformationen fra Schwarzschild-metrikken "tilbage" til Kruskal-metrikken. Her skal r forstås som en funktion af V og U , $r = r(V, U)$. Lighedstegnene i (9.6) og (9.7) kan nemt vises ved at indsætte Kruskal-kordinaterne og bruge $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ samt $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. For konstant r kan vi se fra (9.6), at

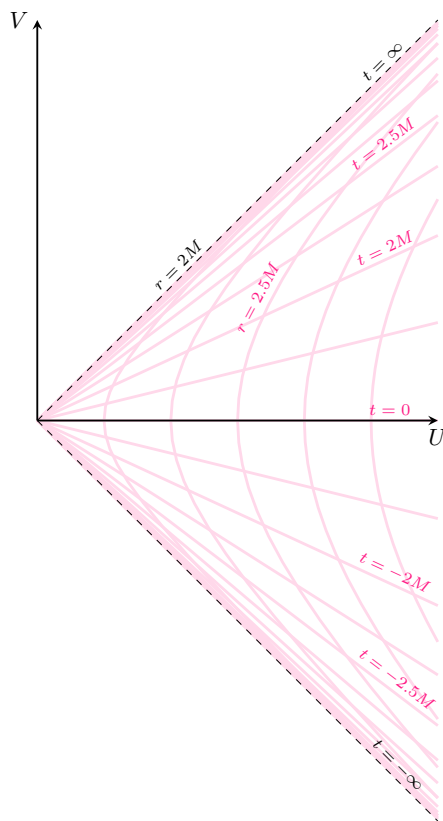
$$U^2 - V^2 = \text{konstant}, \quad (9.8)$$

hvilket vi genkender som hyperblens ligning. Kurver med konstant r , dvs. en bestemt afstand fra legemet og dermed en bestemt afstand i tyngdepotentialet, afbildes altså som hyperbler i Kruskal-diagrammet. Indsættes horisonten $r = 2M$ i (9.6) fås

$$V = \pm U, \quad (9.9)$$

og er en ret linje med hældningen ± 1 gennem origo. For konstante værdier af tiden t , ses det fra (9.7), at $U/V = \text{konstant}$, dvs. rette linjer i Kruskal-diagrammet gennem origo med hældningen $\tanh(t/4M)$. Når $t \rightarrow \pm\infty$, går (9.7) mod en ret linje med hældningen ± 1 , og er derfor repræsenteret på samme måde som (9.9) for horisonten $r = 2M$. Når disse kurver afbildes på Kruskal-diagrammet, ser det ud som på figur 9.1.

Lad os stoppe op og overveje, hvad vi er kommet frem til. Ved at tage udgangspunkt i Schwarzschild-metrikken, har vi defineret nogle nye koordinater, vis fysiske og geometriske fortolkning er præcis den samme, som fra vores diskussion om Schwarzschild-horisonten. Hyperblerne repræsenterer kurver med konstant afstand r , dvs. en bestemt afstand fra det gravitationelle objekt. Kurver med konstant tid t er repræsenteret ved rette linjer gennem origo, og kurver med en hældning på 45° repræsenterer lyset. Men i modsætning til før, har vi



Figur 9.1: Afbildning af Kruskal-diagrammet. Ligheden med Rindler-kilen ses ganske tydeligt.

ikke lavet en approksimation nær horisonten. Kruskal-kordinaterne er derfor noget mere generelle end ρ og ζ , vores koordinater nær horisonten.

I litteraturen bruges Kruskal-kordinater ofte som en slags afrunding på gennemgangen af sorte huller - en alternativ måde at visualisere begivenhedshorisonten på. I vores tilfælde er det derimod en ganske naturlig måde at visualisere sorte huller på, fordi vi først har arbejdet med Rindler-kilen og Rindler-horisonten.

9.2 Koordinat- og gravitationelle singulariteter

Noget andet meget interessant ved Kruskal-metrikken er, hvordan den opfører sig ved horisonten $r = 2M$. I modsætning til Schwarzschild-metrikken er Kruskal-metrikken ikke singulær ved $r = 2M$, hvilket ses direkte ved at indsætte $r = 2M$ i (9.3). Det faktum underbygger i høj grad vores forklaring af, hvorfor horisonten er en koordinat-singularitet: Vi kan skifte til nogle andre koordinater, hvor singulariteten rent faktisk ikke opstår! Ikke nok med, at singulariteten ved $r = 2M$ er væk, så kan Kruskal-kordinaterne faktisk fortælle os, hvad der sker, selv når vi har passeret horisonten, dvs. når $r < 2M$. Først skal vi lige kigge igen på (9.4) for $r < 2M$. Når $r = 2M$ har vi, at $U = V = 0$,

men når $r < 2M$ bliver U og V imaginære. Men U og V kan også udtrykkes på en anden måde, således at de er reelle i området $r < 2M$

$$\begin{aligned} U &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Ligesom med (9.4) kan (9.10) indsættes i Kruskal-metrikken, således at vi igen får Schwarzschild-metrikken. De to udtryk for r og t givet ved (9.6) og (9.7) er de samme, lige meget om vi bruger (9.4) eller (9.10). Kigger vi på (9.6) kan vi se, at vi også får en parabel når $r < 2M$, men med den forskel, at fortegnet bliver negativt. Dette ses på figur 9.2. For i det følgende at bevare overblikket, vil vi angive de forskellige regioner i Kruskal-diagrammet med romertal. Som det ses på figuren, beskriver regionen I området af Kruskal-diagrammet hvor $r > 2M$, og regionen II beskriver området hvor $r < 2M$.

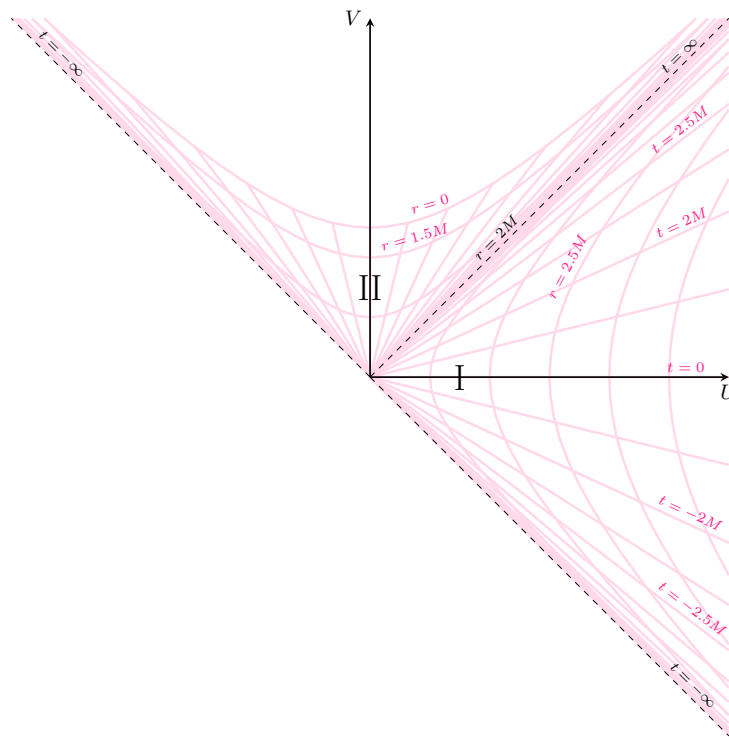
Men hvad sker der, når $r = 0$? I det tilfælde bliver Kruskal-metrikken, ligesom Schwarzschild-metrikken, singular! Det gælder generelt, at alle koordinater, der tager udgangspunkt i Schwarzschild-løsningen, har til fælles, at metrikken er singular ved $r = 0$. Punktet $r = 0$ repræsenterer altså en område i rumtiden, man ikke kan transformere væk ved passende valg af koordinater. Vi betegner $r = 0$ en gravitationel singularitet, også kaldet en fysisk singularitet. Kigger vi igen på (9.6), kan vi se, at for $r = 0$ er

$$U^2 - V^2 = -1, \quad (9.11)$$

ligeledes vist på figur 9.2.

Lad os kigge lidt nærmere på den fysiske fortolkning af den gravitationelle singularitet. Vi har fastslået, at der ikke kan etableres en tovejskommunikation mellem den indfaldende og den eksterne observatør, når den indfaldende observatør krydser Schwarzschild-horisonten. Men vi ved, at dette er en koordinatsingularitet, og at den indfaldende ikke tillægger passagen af horisonten nogen særlig værdi. Men hvad sker der for den indfaldende, når han bevæger sig hen imod den fysiske singularitet $r = 0$? For at svare på det, vil vi bruge vores viden om tidsligt og rumligt separerede begivenheder igen, som vist på figur 2.1. Som nævnt, afbildes lyskeglen i Kruskal-diagrammet på samme måde som i Minkowski-diagrammet. Selve "skelettet" af Kruskal-diagrammet er altså det samme som Minkowski-diagrammet. Vi kan derfor også overføre vores viden om tidsligt og rumligt separerede begivenheder og bruge det på Kruskal-diagrammet.

Lad os sammenligne to observatører, en der befinder sig i region I, hvor $r > 2M$, og en der befinder sig i region II, hvor $r < 2M$. For at finde ud af, om begivenhederne er rumligt eller tidsligt separerede, indtegner vi to lyskegler i de to regioner, hvor observatørerne befinder sig, som vist på figur 9.3. For observatøren i I gælder der, at fordi den hyperbel, han befinder sig på, ligger inden for den tidslige del af lyskeglen, vil han kunne befinde sig på et hvilket som helst punkt på hyperblen i hans fremtid. Den fysiske fortolkning af dette er, at han vil kunne blive i den samme afstand f.eks. $r = 2.5M$ fra horisonten, som tiden går. Kigger vi på observatøren i II, er situationen en helt anden. Her ligger den specifikke hyperbel han befinder sig på *ikke* indenfor den tidslige del af den fremtidige lyskegle. Den tidslige retning derimod har retning mod den

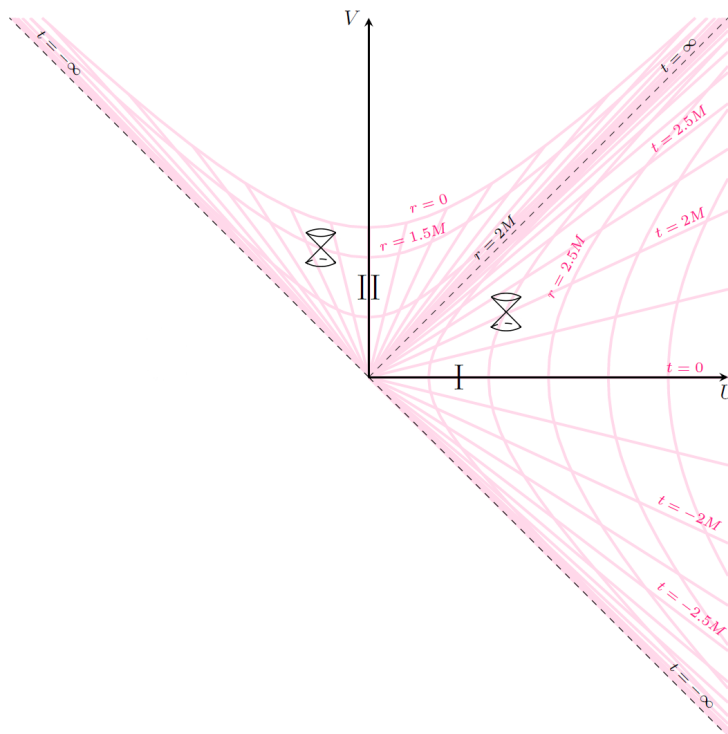


Figur 9.2: Kruskal-diagrammet hvor både region I og II er afbildet.

gravitationelle singularitet $r = 0$. For at komme fra en begivenhed i rumtiden til en anden, der er tidsligt separeret (hvilket jo er et krav for et massivt objekt), skal observatøren altså tættere på $r = 0$. Generelt har alle tidslige separerede begivenheder (i fremtiden) for alle observatører i II retning mod $r = 0$. Det, vi altså kan konkludere, er, at når man er kommet over på den anden side af koordinatsingulariteten $r = 2M$, er den gravitationelle singularitet $r = 0$ uundgåelig!

Den overordnede årsag til dette skal findes i skiftet på fortegnet på hyperbellerne i region I og II, hvilket rent grafisk vil sige, at de “vender” anderledes i de to regioner. I region I har vi altså at stigende U svarer til stigende r (afstanden varierer langs U), hvorimod vi i II har at stigende V svarer til aftagende r (afstanden varierer langs V). Men eftersom opfattelsen af tidsligt og rumligt separerede begivenheder over hele Kruskal-diagrammet er den samme, må det nødvendigvis føre til den omtalte fortolkning af en uundgåelig singularitet. Alt dette bunder i et sorts huls særprægede krumning af rumtiden.

Hvad sker der så egentligt med den indfaldende observatør, når han falder ind og rent faktisk “rammer” den gravitationelle singularitet? Et fyldestgørende svar hviler på brugen af feltligningerne, som vi ikke vil gå i detalje med her. En detaljeret gennemgang kan findes i [14] kapitel 32.6, hvor det udregnes, hvad der sker med en eksperimentel astrofysiker, der falder ind i singulariteten $r = 0$. Hovedkonklusion er, at han vil blive kvast, fordi de gravitationelle kræfter på ham bliver for store, hvilket resulterer i hans endeligt.



Figur 9.3: Kruskal-diagrammet med en lyskegle indtegnet i region I og region II for at forstå den uundgåelige singularitet $r = 0$.

9.3 Den maksimalt udvidede Schwarzschild-løsning

For fuldstændighedens skyld vil jeg slutte med at sige, at Kruskal-metrikken kan fortælle os endnu mere, end det vi har kigget på. Indtil nu har vi “kun” beskrevet regionerne I og II. Men Kruskal-metrikken kan faktisk også beskrive regionerne III og IV, som vist på figur 9.4. Rent matematisk er regionerne III og IV beskrevet ved at ændre fortegnet på hhv. U og V i (9.4) og (9.10). Tabel 9.1 viser Kruskal-koordinaterne i de fire regioner. De fire regioner kaldes også den maksimalt udvidede Schwarzschild-løsning, fordi det er den mest komplette beskrivelse af sorte huller med udgangspunkt i Schwarzschild-metrikken, hvilket også var titlen på Kruskals artikel (*Maximal Extension of Schwarzschild Metric*) [11].

Den fysiske fortolkning af III og IV er dog noget vanskeligere end I og II. Vi kan tænke på region III som et slags spejlbillede af region I, på samme måde som med Rindler-kilen på figur 3.6. Læg her mærke til, at kurverne med konstant t i region III går fra $t = \infty$ til $t = -\infty$, modsat region I, hvor de går fra $t = -\infty$ til $t = \infty$. Fordi der ikke er nogle tidsligt separerede begivenheder, der går fra I til III (dette ville kræve overlyshastighed), kan region III ikke nås fra “vores” region I, hverken frem eller tilbage i tid. Tilsvarende kan ingen fra III nå os i I. Regionerne I og III kaldes også i litteraturen for asymptotisk flade områder af rumtiden, der betyder, at det er et område af rumtiden hvor tyngdefeltet (og dermed rummets krumning) bliver negligerbart uendeligt langt væk fra kilden til

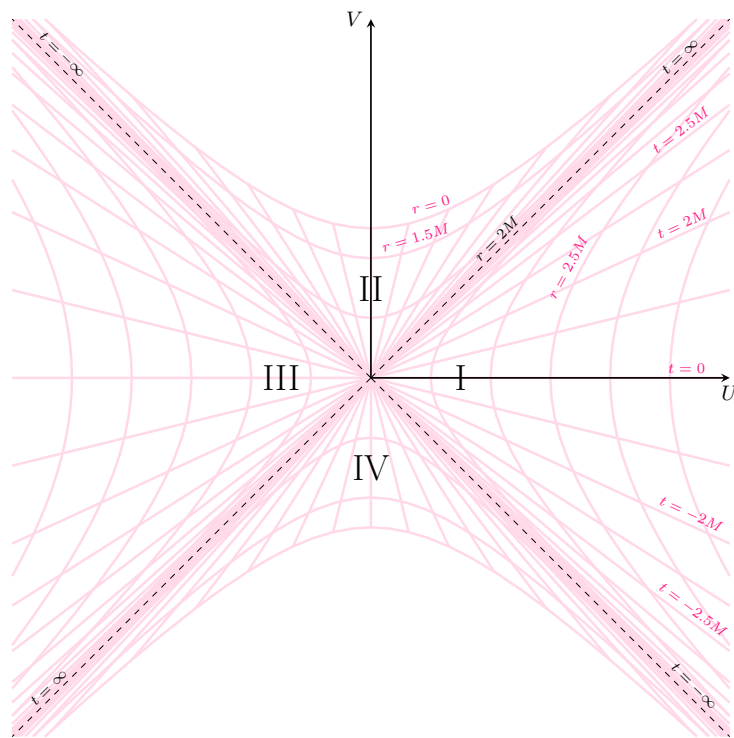
tyngdefeltet, og er i denne grænse repræsenteret ved Minkowski-metrikken. Vi har vist, at Schwarzschild-metrikken netop har denne egenskab. Rent teoretisk kan de to regioner I og III forbindes vha. en såkaldt Einstein-Rosen-bro [5], der netop af defineret som en struktur, der forbinder to asymptotisk flade regioner af rumtiden. I populærvidenskaben kaldes dette også et ormehul [23], som i science fiction ofte forklares som en slags bro eller hul, der forbinder to universer.

Kigger vi på region IV kan vi se, at den ligesom region I indeholder en singularitet, ligeledes ved $r = 0$. Vi kan også se, med vores viden om Mikowski-diagrammets lyskegler, at regionen ligger inden for den fortidige del af keglen. Her ligger singulariteten $r = 0$ altså i fortiden i forhold til region II. Denne del af rumtiden kaldes i litteraturen for et hvidt hul, der, som navnet antyder, er det modsatte af et sort hul: Hvor det for et sort hul gælder, at man kan falde ind i det udefra, og hvor end ikke lys kan undslippe, er et hvidt hul karakteriseret ved, at den frastøder partikler, hvilket vil sige, at man ikke kan trænge ind i den. Et hvidt huls mulige eksistens kan altså ikke forklares ud fra gravitationel kollaps af stjerner.

Vi kan altså konkludere, at den maksimalt udvidede Schwarzschild-løsning, illustreret på Kruskal-diagrammet 9.4, indeholder to asymptotisk flade regioner (eller universer), hvor $r > 2M$ (I og III) samt to regioner, der hver indeholder en gravitationel singularitet ved $r = 0$ (II og IV). Med udgangspunkt i vores forhåndsviden om Rindler-kilen og koordinatsingulariteter har vi bygget videre med Schwarzschild-metrikken og gravitationelle singulariteter, og på den måde fået en dybdegående forståelse af gravitationelle aspekter af sorte huller.

Region	U	V
I	$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$	$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$
II	$\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$	$\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$
III	$-\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$	$-\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$
IV	$-\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right)$	$-\left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$

Tabel 9.1: Kruskal-koordinaterne U og V i regionerne I–IV.



Figur 9.4: Kruskal-diagrammet for den maksimalt udvidede Schwarzschild-løsning der viser alle fire regioner.

Del III

Kvantemekaniske aspekter

Kapitel 10

Hawking-effekten

I dette kapitel vil vi kigge på kvantemekaniske aspekter af sorte huller. Man kan vise, at sorte huller i virkeligheden ikke er sorte. De udsender derimod termisk stråling i omegnen af begivenhedshorizonten med den såkaldte Hawking-temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} \quad (10.1)$$

I dette kapitel vil jeg vise, hvordan udtrykket (10.1) opstår vha. vores viden om Rindler-koordinater og sorte huller.

10.1 Kvantefeltteori i Minkowski-rummet

For at forklare Hawking-effekten skal vi egentlig kombinere kvantefeltteori med den generelle relativitetsteori, som den engelske fysiker Steven Hawking gjorde i 1974 [9]. Men der optræder en tilsvarende effekt i Rindler-rummet, kaldet Unruh-effekten, opkaldt efter den amerikanske fysiker William Unruh. Han uledte Unruh-effekten som en måde at forklare Hawking-effekten på to år efter Hawkings artikel [26]. Det er vigtigt at pointere, at Hawking-effekten er en semiklassisk teori, forstået på den måde, at partikelaspektet af teorien bliver behandlet kvantemekanisk i form af kvantefeltteori, men tyngdekraften bliver behandlet i form af den generelle relativitetsteori, der er en klassisk feltteori. Der er således ikke tale om en fuldt ud kvantemekanisk teori, der forudsætter en kvantemekanisk teori for tyngdekraften, hvilket der ikke eksisterer på nuværende tidspunkt. Ikke desto mindre er Hawking-effekten en vigtig brik i forståelsen af tyngdekraftens indvirkning på kvantefelter.

For at forklare Hawking-effekten, vil vi altså tage udgangspunkt i Unruh-effekten, der postulerer, at en Rindler-observatør der befinder sig i Minkowski-vakuum vil detektere et termisk spektrum af partikler. I takt med den i specialet anvendte pædagogiske strategi vil vi bruge vores opnåede viden om Rindler-koordinater til at forklare Unruh-effekten og lave overgangen til Hawking-effekten vha. ækvivalensprincippet. For at få en dybdegående forståelse af Unruh-effekten skal vi kigge på kvantefeltteori i Rindler-rummet. En forudsætning for at forstå dette er, at vi først har styr på kvantefeltteori i Minkowski-rummet, så lad os kort opridse de vigtigste resultater herfra. Følgende kapitel er mere eller mindre en oversættelse af kapitel 2.3 og 2.4 i klassikeren [17]. Vi vil i dette kapitel bruge enheder hvor $c = \hbar = 1$.

Kvantefeltteori er kombinationen af kvantemekanik og den specielle relativitetsteori, der forenes i form af en feltteori. Vi vil tage udgangspunkt i det simpleste felt, nemlig et reelt skalarfelt, også kendt som Klein-Gordon feltet, der beskriver feltet for en fri partikel med spin nul. Ligesom da vi kiggede på svagfelts-approximationen til den generelle relativitetsteori, vil vi tage udgangspunkt i Lagrange-mekanik. Vi tænker normalt på Lagrange-funktionen L som $L = T - V$, hvor T er den kinetiske energi og V er den potentielle energi. Nu vil vi bruge Lagrange-densiteten \mathcal{L} defineret ved $L = \int d^3x \mathcal{L}$. Virkningen S , som bekendt er givet ved $S = \int dt L$, kan vi opskrive vha. Lagrange-densiteten som

$$S = \int dt L = \int dt d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (10.2)$$

Fire-volumen d^4x er invariant under en Lorentz-transformation, hvilket vi også kræver, at vores Lagrange-densitet skal være. Derfor er det naturligt at bruge virkningen $S = \int d^4x \mathcal{L}$, fordi den er Lorentz-invariant, hvilket vi nødvendigvis må kræve af kvantefeltteori. At denne Lorentz-invarians er et krav, kan vi forstå lidt bedre ved at kigge på, hvordan vi rent eksperimentelt afprøver partikelfysikken. Lad os som eksempel tage opdagelsen af den for standardmodellen uundværlige brik, Higgs-partiklen. Denne partikel kan produceres gennem kollisioner mellem to protoner, der i partikelacceleratorer bliver accelereret op til energier i TeV-området, der i hastighed svarer til 99,9 % af lysets. Der er altså tale om ultrarelativistiske kollisioner, og vi må derfor nødvendigvis kræve af vores teori, at den er i overensstemmelse med relativitetsteorien. For at forstå partikelfysikken skal vi derfor forene kvantemekanikken og relativitetsteorien.

Bevægelsesligningen, dvs. Euler-Lagrange-ligningen, kan findes ud fra den forsvindende variation af virkningen, $\delta S = 0$, mht. variationer af de frihedsgrader vi har med at gøre (f.eks. partiklernes koordinater). Euler-Lagrange-ligningen er givet ved

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (10.3)$$

hvor $\partial_\mu = (\partial/\partial t, \vec{\nabla})$ er fire-gradienten. I det følgende vil vi betegne feltet med ϕ , der ikke skal forveksles med vinklen i sfæriske koordinater. Vi kan anskue denne ligning som den relativistiske kontinuums udgave af den "normale" Euler-Lagrange ligning givet ved (7.2). Lagrange-densiteten for et frit skalarfelt ϕ er givet ved

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m \phi^2. \quad (10.4)$$

Indsættes (10.4) i Euler-Lagrange-ligningen (10.3) fås Klein-Gordon-ligningen

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi = 0, \quad (10.5)$$

der har planbølgeløsningen $\phi = N e^{\pm(i\omega_p t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$, hvor N er en normeringskonstant, og frekvensen har dispersionsrelationen givet ved $\omega_p^2 = m^2 + p^2$. Vi vil i det følgende kalde løsningerne for egensvingninger. Klein-Gordon ligningen kan også udledes i "almindelig" kvantemekanik, hvor energi og impuls erstattes af deres operatorer $E \rightarrow i\partial_t$ og $p \rightarrow -i\vec{\nabla}$ og indsættes i det relativistiske korrekte udtryk for energien $E^2 = m^2 + p^2$. Klein-Gordon ligningen udtrykker altså, på en lidt abstrakt måde, denne energidispersion. Dette faktum, og at $\partial_\mu \partial^\mu$

er relativistisk invariant, viser, at Klein-Gordon ligningen er en relativistisk bølgeligning.

Det foregående har været rent klassisk feltteori, og vi vil nu kvantisere Klein-Gordon feltet ved at bruge en analogi til den kvantemekaniske harmoniske oscillator. Lad os betragte et system med et diskret sæt af positions- og impulsvariable, som vi benævner q_i og p_i henholdsvis. Vi kender de kanoniske kvantiseringsregler fra kvantemekanik

$$\begin{aligned} [q_i, p_i] &= i\delta_{ij} \\ [q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0, \end{aligned} \quad (10.6)$$

hvor

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases} \quad (10.7)$$

er Kroeneckers delta. Når bølgefunktionen blot er en funktion, og de ovennævnte kommutatorrelationer anvendes, kaldes dette ofte "første-kvantisering". Det står i kontrast til den såkaldte "anden-kvantisering", hvor vi ophøjer vores bølgefunktion ϕ fra en bølgefunktion til en operator.

Fordi Klein-Gordon ligningen (10.5) er bølgefunktionen for et felt, har den et kontinuum af frihedsgrader (værdien af ϕ i ethvert punkt i rumtiden). Vi vil nu generalisere ovennævnte kommutatorrelationer til

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{x}')] &= [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')] = 0, \end{aligned} \quad (10.8)$$

hvor $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$ er deltafunktionen, og $\hat{\pi}$ er impulsen, som vi associerer med Klein-Gordon feltet.

Vi skal dog først finde ud af, hvordan vi helt konkret skal kvantisere Klein-Gordon-feltet, og for at gøre det vender vi tilbage til det klassiske Klein-Gordon felt og ekspanderer den vha. en Fourier-transformation

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t). \quad (10.9)$$

Indsættes (10.9) i Klein-Gordonligningen (10.5) fås

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (10.10)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) \quad (10.11)$$

$$= 0, \quad (10.12)$$

hvor vi har ladet $\partial^2/\partial t^2$ og $\vec{\nabla}^2$ virke på eksponentialfunktionen. Ovenstående må gælde for alle $\phi(\vec{p}, t)$, således at

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\vec{p}, t) = 0. \quad (10.13)$$

Omskriver vi til

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{p}, t) = -(|\vec{p}|^2 + m^2) \phi(\vec{p}, t), \quad (10.14)$$

kan vi se, at det blot er ligningen for en simpel harmonisk oscillator (som i bøger om klassisk mekanik ofte ses på formen $\ddot{x} = -\omega^2 x$) med frekvensen

$$\omega_p = \sqrt{|p|^2 + m^2}. \quad (10.15)$$

Den harmoniske oscillator er en model vi kender ganske godt, og vi vil nu kvantisere Klein-Gordon feltet vha. den kvantemekaniske harmoniske oscillator. For at lette notationen vil vi blot betragte oscillatoren i én dimension, så impulsen er p og ikke \vec{p} . Husk på at Hamilton-operatoren (per masseenhed m) for den harmoniske oscillator er givet ved

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{\phi}^2 \quad (10.16)$$

For at finde dennes egenverdier introducerer man ofte de ikke-Hermitiske såkaldte stigeoperatorer a og a^\dagger

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{\phi} + \frac{i}{\omega} \hat{p} \right) \quad (10.17)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{\phi} - \frac{i}{\omega} \hat{p} \right), \quad (10.18)$$

som vi kan invertere til

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (10.19)$$

$$\hat{p} = -i\frac{\omega}{2} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (10.20)$$

Indsætter vi (10.19) og (10.20) i kommutatorrelationerne givet ved (10.8), som for den harmoniske oscillator bliver $[\hat{\phi}, \hat{p}] = i$ og $[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0$, medfører det, at

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (10.21)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = 0 \quad (10.22)$$

Indsætter vi (10.19) og (10.20) i (10.16) fås

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (10.23)$$

Vi betegner egentilstandene for den harmoniske oscillator med $|n\rangle$, og definerer oscillatorens vakuumtilstand $|0\rangle$ ved $\hat{a}|0\rangle = 0$, med egenværdien $\frac{1}{2}\omega$. Vha. kommutatorrelationerne (10.21) og (10.22) kan man vise, at $[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega\hat{a}^\dagger$ og $[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega\hat{a}$, hvilket man igen kan bruge til at vise, hvordan \hat{a} og \hat{a}^\dagger virker på egentilstandene $|n\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Det fremgår altså, at \hat{a} fratrækker et kvantum fra oscillatoren, hvorimod \hat{a}^\dagger tilføjer et kvantum til oscillatoren. Derfor kaldes \hat{a} og \hat{a}^\dagger også henholdsvis annihilations- og kreationsoperatorer. En tilstand med n partikler opnås ved gentagne gange at anvende \hat{a}^\dagger

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (10.25)$$

Ved at bruge (10.24) kan vi vise, at

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad (10.26)$$

og derfor er forventningsværdien givet ved

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \langle n | \hat{N} |n\rangle = n, \quad (10.27)$$

hvor $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Vi kan altså se, at \hat{N} angiver (eller tæller) antallet af kvanter i oscillatoren, hvorfor den også kaldes tælleoperatoren. Energien er givet som forventningsværdien af Hamilton-operatoren, hvorfor vi får

$$E = \omega(n + \frac{1}{2}). \quad (10.28)$$

Tilstandene $|n\rangle$, der er egentilstande for tælleoperatoren, udgør en basis for hele Hilbert-rummet, kendt som Fock-basen. Rummet, der konstrueres fra denne basis, kaldes Fock-rummet.

Lad os nu stille os selv et trivielt spørgsmål: Hvad er forventningsværdien af \hat{N} i vakuum? Svaret er givet ved $\langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle = 0$, fordi $\hat{a} |0\rangle = 0$. Vi skal senere bruge denne forventningsværdi af tælleoperatoren i vakuum til at vise Unruh-effekten.

Lad os vende tilbage til Klein-Gordon feltet. Vi bruger nu den omtalte analogi til den harmoniske oscillator og siger, at for hver egensvingning med impuls \vec{p} af Klein-Gordon feltet er der en tilsvarende harmonisk oscillator med operatorer \hat{a} og \hat{a}^\dagger . I analogi med (10.19) og (10.20) er den generelle ekspansion af Klein-Gordon-feltet givet ved

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad (10.29)$$

og tilsvarende for $\hat{\pi}(x)$. For at kommutatorrelationerne skal være givet ved (10.8), må der derfor gælde

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (10.30)$$

Vi har nu kvantiseret Klein-Gordon feltet! Til sidst vil vi opskrive feltet i Heisenberg-billedet, hvor tilstandsvektorerne er tidsuafhængige, men hvor operatorerne til gengæld bærer tidsafhængigheden. En operator i Heisenberg-billedet er givet ved

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \quad (10.31)$$

Ved en længere udregning, se kapitel 2.4 i [17], kan man vise, at Klein-Gordon-feltoperatoren i Heisenberg-billedet kan skrives på den elegante form

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-i(\omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i(\omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{x})} \right) \quad (10.32)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right), \quad (10.33)$$

hvor vi har brugt den kompakte notation $p = p^\mu = (\omega_p, \vec{p})$ og $x = x^\mu = (t, \vec{x})$ således at $p\cdot x = \omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{x}$. Nu kan vi se, at feltet $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ i Heisenberg-billedet er

en ekspansion i dens egensvingninger, dvs. en ekspansion i løsninger til Klein-Gordon ligningen $e^{\pm ip \cdot x}$. Vi kan også fortolke det på en anden måde ved at huske tilbage til "almindelig" kvantemekanik og betragte tidsudviklingsfaktoren (fasefaktoren) for en stationær tilstand i Schrödinger-ligningen

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-iEt/\hbar}, \quad (10.34)$$

hvor vi, for at vække genkendelsens glæde, midlertidigt har skrevet den i enheder med Plancks konstant \hbar . Fasefaktoren $e^{-iEt/\hbar}$ forbinder vi altså med positiv energi (som vi kalder frekvens i enheder hvor $\hbar = 1$). Hvis vi fortolker eksponentialfunktionerne $e^{-ip \cdot x}$ og $e^{ip \cdot x}$ i (10.33) som enkelt-partikel bølgefunktioner, svarer de til tilstande med henholdsvis positiv og negativ frekvens, fordi de indeholder henholdsvis $e^{-i\omega_p t}$ og $e^{i\omega_p t}$. Bruger vi vores viden om annihilations- og kreationsoperatorer, kan vi altså se, at annihilation af en partikel med positiv frekvens, $\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x}$, og kreationen af en partikel med negativ frekvens, $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}$, indgår på lige fod i ekspansionen af feltoperatoren. Denne fortolkning skal blive meget vigtig i vores forståelse af Unruh-effekten.

For at lette notationen i det følgende vil vi benævne (de normerede) egensvingninger på følgende måde

$$f_{\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega_p t)} \quad (10.35)$$

$$f_{\vec{p}}^* = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega_p t)}, \quad (10.36)$$

hvor $f_{\vec{p}}$ og $f_{\vec{p}}^*$ betegner egensvingninger med henholdsvis positiv og negativ frekvens. Klein-Gordon feltet er nu givet ved

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int d^3p \left(\hat{a}_{\vec{p}} f_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger f_{\vec{p}}^* \right). \quad (10.37)$$

Inden vi går videre, vil vi stille os selv endnu et trivielt spørgsmål. Hvad ser en Minkowski-observatør i Minkowski-vakuuum? Svaret er givet ved at tage forventningsværdien af \hat{N} i Minkowski-vakuuum dvs. $\langle 0_M | \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} | 0_M \rangle = 0$. En Minkowski-observatør i vakuuum vil altså ikke detektere nogle partikler, som forventet. En forudsætning for ikke at detektere nogle partikler er, at vi kan fortolke \hat{a} og \hat{a}^\dagger som henholdsvis annihilations- og kreationsoperatorer. Der må aldrig være tvivl om, at \hat{a} altid er annihilationsoperatoren, og at \hat{a}^\dagger altid er kreationsoperatoren. Laver vi en Lorentz-transformation til en anden Minkowski-observatør, vil han stadig have den samme fortolkning af \hat{a} og \hat{a}^\dagger , og de vil derfor begge have den samme opfattelse af vakuuum. I det følgende vil vi undersøge, hvad der sker, hvis fortolkningen af \hat{a} som annihilationsoperator og \hat{a}^\dagger som kreationsoperator bryder sammen.

10.2 Kvantefeltteori i en krum rumtid

Lad os nu forestille os, at vi har to forskellige Fock-rum, hvori feltekspansionen er givet ved

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*) \quad (10.38)$$

og

$$\hat{\phi} = \sum_i (\hat{b}_i g_i + \hat{b}_i^\dagger g_i^*). \quad (10.39)$$

Lad os kalde de to rum henholdsvis f -rummet og g -rummet. Egensvingningerne f_i og f_i^* samt operatorerne \hat{a}_i og \hat{a}_i^\dagger tilhører altså f -rummet og egensvingningerne g_i og g_i^* samt operatorerne \hat{b}_i og \hat{b}_i^\dagger tilhører g -rummet. Fordi det er to forskellige Fock-rum, er der derfor også to forskellige vakuum, givet ved $\hat{a}_i |0_f\rangle = 0$ og $\hat{b}_i |0_g\rangle = 0$. For at lette notationen og udregningerne er vi gået væk fra kontinuumsbeskrivelsen og betragter i stedet indekset i som værende diskret, hvorfor vi summer (ikke integrerer) over indekset i ekspansionen (10.38) og (10.39). Da begge Fock-rum er komplette, kan egensvingningerne g_i udtrykkes vha. f_i og omvendt

$$g_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (10.40)$$

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji} g_j - \beta_{ji} g_j^*). \quad (10.41)$$

Dette er en såkaldt Bogolubov-transformation, og α_{ij} og β_{ij} kaldes Bogolubov-koefficienter. Vi kender Bogolubov-transformationen fra mange andre grene af fysikken, især indenfor mangelegemefysik, såsom faststoffysik og kernefysik, hvor fællestrækket er, at Bogolubov-transformationen bruges til at beskrive systemer med "pairing"-effekter mellem partiklerne. Den oprindelige anvendelse af transformationen var i forbindelse med superledning, hvor man indførte en Bogolubov-transformation mellem operatorerne for spinorbitaler for at diagonalisere Hamilton-operatoren, der beskriver superledningen, den såkaldte BCS-Hamilton, og dermed finde energispektret for systemet. Det er med samme metode, at man i kernefysik bruger Bogolubov-transformation til at beskrive det såkaldte "pairing"-vekselvirkning mellem nukleoner. Vi vil ikke gå i detalje med, hvordan Bogolubov-koefficienterne er givet, og hvordan man udregner dem, for en detaljeret gennemgang se f.eks. [3, 1]. Lad os i stedet antage at transformationen gælder og se på den fysiske konsekvens af dette. Der gælder også en tilsvarende Bogolubov-transformation mellem operatorerne \hat{a}_i og \hat{b}_i

$$\hat{a}_i = \sum_j (\alpha_{ji} \hat{b}_j + \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger) \quad (10.42)$$

$$\hat{b}_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* \hat{a}_j - \beta_{ij} \hat{a}_j^\dagger) \quad (10.43)$$

Nu er det ganske simpelt at vise, at de to observatører, en der befinder sig i f -rummet med ekspansionen (10.38), og en der befinder sig i g -rummet med ekspansionen (10.39), ikke nødvendigvis har samme opfattelse af vakuum. Lader vi annihilationsoperatoren \hat{b}_i fra g -rummet virke på f -rummets grundtilstand $|0_f\rangle$ fås

$$\hat{b}_i |0_f\rangle = - \sum_j \beta_{ij}^* |1_f\rangle_j, \quad (10.44)$$

der ikke nødvendigvis er nul. Vi kan se, at udtrykket kun giver nul, hvis samtlige Bogolubov-koefficienter i summen er nul. Nu kan vi også regne forventnings-

værdien af $\hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ i f -vakuum, som vi ved angiver antallet af partikler

$$\langle 0_f | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0_f \rangle = \sum_j \beta_{ij} \beta_{ij}^* = \sum_j |\beta_{ij}|^2. \quad (10.45)$$

Antallet af partikler i f -vakuummet er altså givet ved $\sum_j |\beta_{ji}|^2$. Det der ligner vakuum fra én observatørs perspektiv, kan indeholde partikler ifølge en anden observatør. Det kan ses direkte fra (10.43), hvorfor det forholder sig sådan. Hvis $\beta_{ji}^* = 0$, så vil en annihilationsoperator i det ene rum også svare til en annihilationsoperator i det andet rum, og hvis $\beta_{ji}^* \neq 0$, så vil annihilationsoperatoren i det ene rum være en superposition af en annihilationsoperator og en kreationsoperator fra det andet rum.

Dette var et lille matematisk sidespring, så lad os lige minde os om igen, hvad det var, vi ville udlede, nemlig at en observatør, der undergår konstant egenacceleration, vil observere et termisk spektrum af partikler, også kaldet et Planckspektrum. Det skal ses i forhold til en Minkowski-observatør, der ikke observerer noget. Det hele bunder i, at vi gerne vil beskrive accelererende observatører, som matematisk kommer til udtryk ved Rindler-koordinaterne. Grunden til, at Unruh-effekten opstår, ligger i accelerationen og måden hvorpå den påvirker Minkowski-rummet. I kvantefeltteorien har det den konsekvens, at der mellem en Rindler-observatør og en Minkowski-observatør ikke længere hersker enighed om, hvad der er annihilationsoperatorer, og hvad der er kreationsoperatorer, og derfor også hvad der forstås ved et vakuum. Rent matematisk er det givet ved Bogolubov-transformationen, som vi kan anskue som en transformation mellem Rindler-rummets og Minkowski-rummets kreations- og annihilationsoperatorer. Derfor er det vigtigt at forstå Bogolubov-transformationens betydning.

10.3 Rindler-koordinater igen

Vi vil nu kigge på Rindler-koordinaterne igen, omend i en lidt anden udgave end vi har set før. Vi definerer de nye Rindler-koordinater, ξ og η således, at t og x er givet ved

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \\ x &= \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \end{aligned} \quad (10.46)$$

hvor a er accelerationen, som ikke nødvendigvis er lig egenaccelerationen. Sammenligner vi med (3.18) og (3.19), kan vi se, at forholdet mellem de nye og gamle Rindler-koordinater er givet ved $\alpha = ae^{-a\xi}$ og $a\eta = \alpha\tau \Rightarrow \tau = e^{a\xi}\eta$. Indsætter vi (10.46) i rumtidsintervallet

$$ds^2 = dt^2 - dx^2, \quad (10.47)$$

og bruger den sædvanlige $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ fås

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2). \quad (10.48)$$

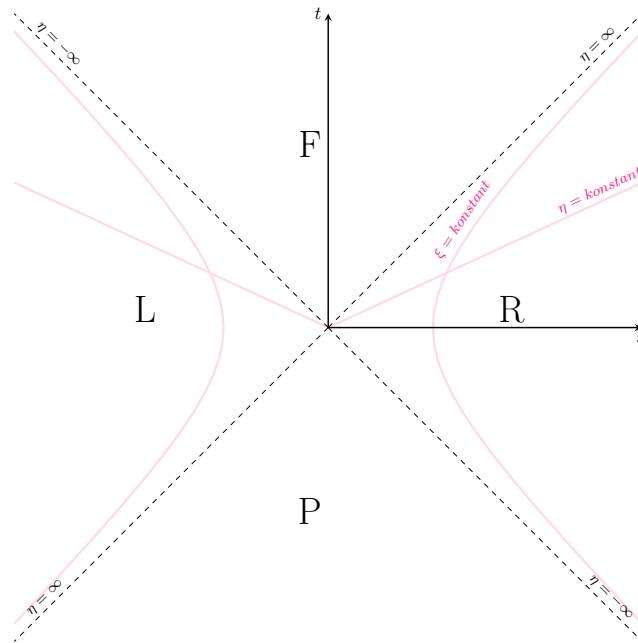
Fordelen ved at definere Rindler-koordinaterne på denne nye måde er, at Rindler-metrikken er såkaldt konform invariant, hvilket i dette tilfælde betyder, at den kun afskiller sig fra Minkowski-metrikken ved fasefaktoren $e^{2a\xi}$. Helt generelt

er en konform transformation af metrikken givet ved $g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$, hvor $\Omega(x)$ er en reel og kontinuert funktion, som vi her identificerer med $e^{a\xi}$. Man kan vise, se f.eks. appendiks G i [3], at hvis $m = 0$ er også virkningen S og dermed feltligningerne invariante under en konform transformation. I vores tilfælde betyder det, at den masseløse Klein Gordon-ligning i Rindler-rummet har samme form som Klein-Gordon ligningen i Minkowski-rummet. For at lette udregningerne i resten af kapitlet, vil vi kun arbejde i to dimensioner således, at vi har en tidskoordinat og én rumkoordinat.

Den geometriske fortolkning af Rindler-koordinaterne (ξ, η) er den samme, som vi kender, hvilket indses ved at udregne

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2} e^{2a\xi}. \quad (10.49)$$

For konstant ξ kan vi se, at dette er en hyperbel, som det ses på figur 10.1. Vi kan også få en anden Rindler-kile ved at spejle kilen i regionen R i t -aksen. Dermed bliver kilen i regionen L et spejlbillede af den højre kile. Det opnås rent matematisk ved at ændre fortegnet i (10.46). Det har den konsekvens, at tiden er inverteret i den venstre kile i forhold til den højre, forstået på den måde, at i den venstre kile, L, aftager tidskoordinaten η med stigende t . Vi kan se det, hvis vi kigger på figur 10.1 igen. Hvis vi forlænger tidslinjerne (de rette linjer) ind i den venstre kile, så spænder de over $\eta = \infty$ til $\eta = -\infty$, hvorimod de i den højre kile spænder fra $\eta = -\infty$ til $\eta = \infty$. Lidt groft kan vi sige, at for en observatør i den venstre kile, går tiden i den modsatte retning. Dette bliver ganske vigtigt, når vi kigger på Klein-Gordon-ligningen i Rindler-rummet.



Figur 10.1: Rindler-kilen. Rindler-koordinaterne ξ og η angiver henholdsvis hyperblerne og de rette linjer.

10.4 Kvantefeltteori i Rindler-rummet og Unruh-effekten

Lad os nu vende tilbage til Klein-Gordon-ligningen. Som nævnt har den masseløse Klein-gordon-ligning samme form i Rindler-rummet, hvorfor vi sætter $m = 0$ i (10.5)

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0. \quad (10.50)$$

Vi kan betragte dette felt som en slags forsimplet udgave af Maxwells ligninger. Husk på at Maxwells ligninger kan skrives vha. fire-vektorer på den kompakte form $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$, hvor $F^{\mu\nu}$ er den elektromagnetiske felttensor givet ved $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Her betegner A^μ fire-potentialet $A^\mu = (V, \vec{A})$, hvor V er skalarpotentialet og \vec{A} er vektorpotentialet, og J^μ er fire-strømmen givet ved $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, hvor ρ er ladningsdensiteten og \vec{J} er strømdensiteten. Vi kan lave bestemte transformationer af fire-potentialet uden at ændre på de elektriske og magnetiske felter, også kaldet gauge-transformationer, hvilket betyder, at Maxwells ligninger er invariante under en gauge-transformation. I den såkaldte Lorentz-gauge er $\partial_\mu A^\mu = 0$, hvilket medfører, at $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu$, der i det tomme rum er givet ved $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$. Vi kan altså se, at (10.50) har samme form som Maxwells ligninger i Lorentz-gauge, hvor forskellen er, at A^μ er et vektorfelt, der i den kvantiserede udgave beskriver partikler med spin-1, såsom fotonen, hvorimod ϕ er et skalarfelt, der beskriver partikler med spin-0.

Grundet den konforme invarians har Klein-Gordon ligningen samme form i Rindler-koordinater

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = e^{-2a\xi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \phi = 0, \quad (10.51)$$

og adskiller sig kun fra Klein-Gordon-feltet i Minkowski-rummet ved fasefaktoren $e^{-2a\xi}$. Lad os kigge på løsningerne i regionen R, og lad os starte med egensvingningerne med positiv frekvens, der er givet ved

$$g_{p,R} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ip\xi}, \quad (10.52)$$

hvor $1/\sqrt{4\pi\omega}$ er normeringskonstanten i to dimensioner. Egensvingningen med negativ frekvens er givet ved $g_{p,R}^*$. I regionen L er sagen dog en anden. Husk på at tidskoordinaten η er inverteret i L. Vi kan også se det matematisk ud fra (10.46). I L er $t = -(1/a) \exp(a\xi) \sinh(a\eta) = (1/a) \exp(a\xi) \sinh(a(-\eta))$ grundet regnereglen $-\sinh(x) = \sinh(-x)$. Vi skal altså lave transformationen $\eta \rightarrow -\eta$ således, at

$$g_{p,L} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ip\xi}. \quad (10.53)$$

Den tilsvarende svingning med negativ frekvens er givet ved $g_{p,L}^*$. Lad os stoppe op og tænke over dette. I Rindler-rummet er der altså to forskellige udgaver af negative og positive egensvingninger. I forhold til Minkowski-rummet er der altså uoverensstemmelse mellem, hvad der er en positiv og negativ egensvingning i de to rum. Fra foregående kapitel ved vi, at en Rindler-observatør og en Minkowski-observatør derfor heller ikke er enige om, hvad der er en annihilationsoperator og en kreationsoperator. F.eks. vil en Rindler-annihilationsoperator være givet ved en superposition af en annihilations- og

kreationsoperator fra Minkowski-rummet, og dermed kan de heller ikke være enige om, hvad de opfatter som vakuum. Vi ved nu, med vores opnåede viden om Bogolubov-transformationer, at sammenhængen mellem Minkowski- og Rindleroperatorer netop er givet ved (10.42) og (10.43).

For at holde styr på de forskellige egensvingninger definerer vi nu to sæt egensvingninger, én defineret i R og én defineret i L

$$g_p^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta+ip\xi} & R \\ 0 & L \end{cases} \quad (10.54)$$

$$g_p^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{+i\omega\eta+ip\xi} & L \\ 0 & R \end{cases} \quad (10.55)$$

Egensvingningen (10.54) er komplet i R og (10.55) er komplet i L. Vi kan nu opskrive det kvantiserede Klein-Gordon-felt i Rindler rummet vha. (10.54) og (10.55) (og deres kompleks konjugerede)

$$\hat{\phi} = \int dp \left(\hat{b}_p^{(1)} g_p^{(1)} + \hat{b}_p^{(1)\dagger} g_p^{(1)*} + \hat{b}_p^{(2)} g_p^{(2)} + \hat{b}_p^{(2)\dagger} g_p^{(2)*} \right), \quad (10.56)$$

hvor Rindler-vakuüm er defineret ved $\hat{b}_p^{(1)} |0_R\rangle = \hat{b}_p^{(2)} |0_R\rangle = 0$. Denne ekspansion i Rindler-rummet er altså noget anderledes end den tilsvarende i Minkowski-rummet

$$\hat{\phi} = \int dp \left(\hat{a}_p f_p + \hat{a}_p^\dagger f_p^* \right), \quad (10.57)$$

hvor Minkowski-vakuüm er givet ved $\hat{a}_p |0_M\rangle = 0$. Selvom både (10.56) og (10.57) kan bruges som ekspansion af Klein-Gordon-feltet, er deres fortolkning som et Fock-rum forskellige, f.eks. er deres vakuum forskellige.

Vi er nu klar til at spørge, hvad en Rindler-observatør ser i Minkowski-vakuüm. For at svare på det, skal vi som bekendt tage forventningsværdien af tælleoperatoren $\hat{N} = \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p$ for Rindler-partikler evalueret i Minkowski-vakuüm dvs. $\langle 0_M | \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p | 0_M \rangle$. Fordi en annihilationsoperator i Rindler-rummet er givet ved en superposition af annihilation- og kreationsoperatorer i Minkowski-rummet, ved vi, at $\hat{b}_p |0_M\rangle \neq 0$, hvilket medfører, at en Rindler-observatør, der rejser igennem Minkowski-vakuüm vil detektere partikler, selvom Minkowski-observatøren vil anskue den som værende tom.

Når vi så ved, at en Rindler-observatør rent faktisk vil detektere partikler i Minkowski-vakuüm, hvilke slags partikler er det så? For at svare på det, skal vi finde ud af, hvordan Rindler-operatorerne \hat{b}_p og \hat{b}_p^\dagger er relateret til Minkowskioperatorerne, dvs. at vi skal finde Bogolubov-koefficienterne og på den måde udregne $\langle 0_M | \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p | 0_M \rangle$. Denne udregning er dog meget omfattende, så lad mig i stedet opridsse en simplere metode, som Unruh selv brugte [26]. Denne metode bygger på at definere nye egensvingninger, der tager udgangspunkt i Rindler-egensvingningerne (10.54) og (10.55), og rent analytisk udvide dem således, at de er veldefineret i både R og L samtidigt. På den måde vil disse nye egensvingninger have samme vakuumtilstand som Minkowski-egensvingningerne (der jo netop også er veldefineret i både R og L). Dette kan på tilvarende vis også gøres med Rindler-operatorerne $\hat{b}_p^{(1)}$ og $\hat{b}_p^{(2)}$. Selve udregningen er lidt omfattende, se f.eks. [3, 1], så her vil jeg blot skrive resultatet op

$$\hat{b}_p^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\pi\omega/a)}} \left(e^{\pi\omega/2a} \hat{c}_p^{(1)} + e^{-\pi\omega/2a} \hat{c}_{-p}^{(2)\dagger} \right), \quad (10.58)$$

med et tilsvarende udtryk for $\hat{b}_p^{(2)}$, hvor $\hat{c}_p^{(1)}$ og $\hat{c}_p^{(2)}$ netop er operatorer, der har samme vakuum-tilstand som operatorerne i Minkowski-rummet, dvs. $\hat{c}_p^{(1)} |0_M\rangle = \hat{c}_p^{(2)} |0_M\rangle = 0$. Vi er nu klar til at udregne forventningsværdien

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{N}^{(1)} | 0_M \rangle &= \langle 0_M | \hat{b}_p^{(1)\dagger} \hat{b}_p^{(1)} | 0_M \rangle \\ &= \frac{e^{-\pi\omega/a}}{2 \sinh(\pi\omega/a)} \\ &= \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Sammenligner vi dette med Plancks strålingslov

$$I(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}, \quad (10.60)$$

hvor k_B er Boltzmannkonstanten, og hvor vi for at kunne genkende udtrykket har skrevet alle enhederne ud for en kort bemærkning. $I(\omega, T)$ er intensiteten af lyset pr. bølgelængdeinterval og for en given temperatur T . For bedre at sammenligne med (10.59), skriver vi strålingsloven i enheder hvor $\hbar = c = k_B = 1$, sådan at

$$I(\omega, T) \propto \frac{1}{e^{\omega/T} - 1}, \quad (10.61)$$

og vi kan se, at forventningsværdien (10.59) har samme form som et Planck-spektrum med temperaturen

$$T = \frac{a}{2\pi}. \quad (10.62)$$

En observatør, der bevæger sig med uniform acceleration igennem Minkowski-vakuum, vil altså se et termisk spektrum af partikler. Dette er den såkaldte Unruh-effekt eller Unruh-stråling, og temperaturen af denne stråling er givet ved (10.62).

10.5 Hawking-effekten

Nu er vi langt om længe i stand til at komme frem til Hawking-effekten. På samme måde, som vi brugte ækvivalensprincippet til at komme fra begivenhedshorizonten i den specielle relativitetsteori (Rindler-horizonten), til begivenhedshorizonten i den generelle relativitetsteori, (Schwarzschild-horizonten) vil vi ligeledes her bruge ækvivalensprincippet til at komme fra Unruh-effekten til Hawking-effekten. Vi kan altså erstatte den acceleration Rindler-observatøren undergår, med et tyngdefelt der virker i modsatte retning. Hvilket udtryk for tyngdekraften skal vi indsætte? Vi har set, at Rindler-metrikken har samme form som Schwarzschild-metrikken nær horisonten, så vi indsætter derfor tyngdekraften ved overfladen af det sorte hul, som vi betegner κ . Altså indsætter vi $a = -\kappa$ i (10.62)

$$T = -\frac{\kappa}{2\pi}. \quad (10.63)$$

Denne størrelse kan udledes i den generelle relativitetsteori, se f.eks [3], men i stedet for at gennemgå denne udregning, vil jeg blot vise, at man vha. Newtonsk fysik får samme resultat som en korrekt relativistisk udledning. Betragter vi et

legeme, der forårsager tyngdeaccelerationen $g = -M/r^2$ og indsætter Schwarzschildradien $r = 2M$ fås $\kappa = -1/4M$. Altså får vi, at den stråling, der bliver udsendt fra horisonten, har temperaturen

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (10.64)$$

Vi har altså vist, at en stationær observatør udenfor et sort hul vil se den såkaldte Hawking-stråling, ligesom en Rindler-observatør i vakuum vil se Unruh-stråling, som det er illustreret på figur 10.2.

Lad mig for fuldstændighedens skyld nævne en anden måde at forklare Hawking-effekten på, der ofte er anvendt i litteraturen, se f.eks. kapitel 4 i [23], eller kapitel 17 i [25] for en mere matematisk gennemgang. Forklaringen bygger på, at det sorte huls tyngdepåvirkning er så kraftig, at det kan skabe et partikel-par bestående af en partikel og dens antipartikel, fordi tyngdekraften “trækker så hårdt” i et virtuelt partikel-par, at det er energimæssigt favorabelt at parret dannes. Hvis et sådant partikel-par skabes omkring horisonten $r = 2M$, kan man forestille sig et scenarie, hvor den ene partikel (f.eks. en elektron) skabes lige akkurat udenfor horisonten, hvorimod dens antipartikel (positronen) skabes akkurat indenfor horisonten. Positronen vil derfor falde ind mod centrum af det sorte hul, dvs. ind mod den uundgåelige singularitet $r = 0$, mens elektronen kan vriste sig bort fra det sorte hul og detekteres af en observatør der er i en bestemt afstand væk fra det sorte hul. I denne forklaring er tilstedeværelsen af horisonten dermed helt essentiel.

For at få en bedre fornemmelse af udtrykket for Hawking-temperaturen givet ved (10.64), indfører vi igen enhederne G , c , \hbar og k_B , hvormed temperaturen kan skrives

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}. \quad (10.65)$$

Hvis vi udtrykker temperaturen i forhold til solens masse M_\odot fås

$$T \approx 10^{-7} K \frac{M_\odot}{M}. \quad (10.66)$$

Hvis solen var et sort hul, ville den altså udsende stråling ved overfladen med temperaturen $T \approx 10^{-7} K$. Sammenligner vi f.eks. med den kosmiske mikrobølgebaggrundsstråling, der har temperaturen $T \approx 2.73 K$, kan vi altså se, at Hawking-temperaturen er meget lavere, end vi kan måle, og i skrivende stund er Hawking-stråling da heller ikke blevet observeret.

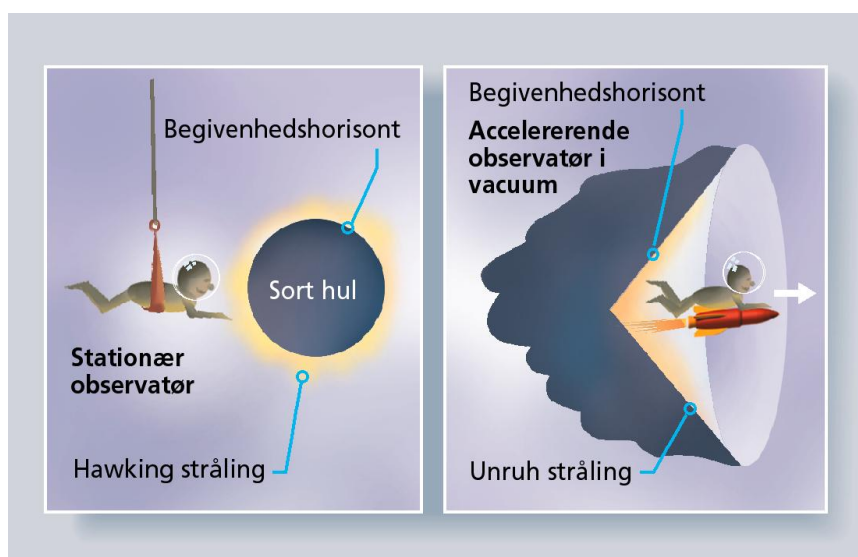
Grundet sammenhængen mellem Hawking-stråling og Unruh-stråling, er det derfor interessant at undersøge, om Unruh-stråling kan detekteres. Rent eksperimentelt er det i hvert fald mere tilgængeligt at arbejde i et laboratorium med partikler der undergår konstant egenacceleration og disses stråling end at måle på strålingen fra sorte huller. Vender vi tilbage til udtrykket for Unruh-temperaturen og genindfører enhederne, får vi

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi c k_B}. \quad (10.67)$$

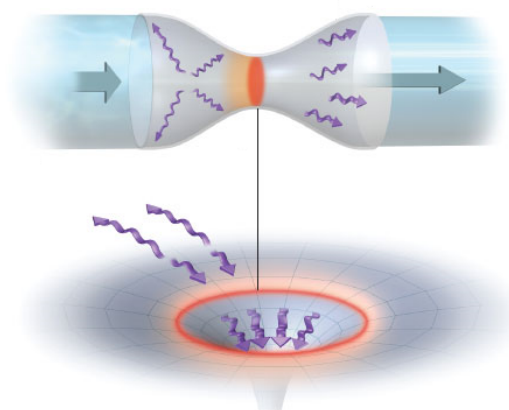
Tager vi et jordnært eksempel, så kan man i princippet bruge Unruh-effekten til at bringe en beholder med vand i kog, hvis den accelereres tilstrækkeligt. Vand koger ved $T = 325 K$ og indsættes dette, får vi, at $a \approx 10^{22} \text{m/s}^2$. Denne

acceleration overskrider dog klart, hvad der rent praktisk er muligt. Dette var bare et tænkt scenarie for at få lidt intuition for Unruh-effekten, men der er også seriøse forslag på eksperimenter, der kan udføres for at detektere strålingen. Her kan f.eks. nævnes en metode, se [4], hvor Unruh-stråling i princippet vil kunne detekteres ved at studere vekselvirkningen mellem et ultraintens laserfelt og en elektron.

Til sidst kan nævnes en interessant analogi til sorte huller, som Unruh selv udbredte i 1970'erne. Det startede som en simpel analogi fra Unruhs side, men har siden banet vejen for seriøs forskning [27]. For en pædagogisk tilgang se [10], som følgende gennemgang bygger på. Forklaringen beror på at der er en tæt analogi mellem udbredelsen af lyd i en turbulent væske og lys i en krum rumtid. Fordi Unruh- og Hawking-effekten er kvantefænomener, er det derfor nødvendigt at studere lydbølger på det mikroskopiske plan, for at analogien bliver korrekt. Det kan f.eks. gøres i kvantegasser hvor temperaturen er tæt på det absolutte nulpunkt, f.eks. i Bose-Einstein-kondensater. Her kan man studere kvantemekaniske egenskaber af lydbølger, vis kvantum kaldes fononer. Når fononer udbredes i en væske, der bevæger sig uniformt, opfører de sig som fotoner i en flad rumtid. Men i en væske der bevæger sig ikke-uniformt, ændres fononernes hastighed og de kan blive rødforskuet ligesom fotoner i en krum rumtid. Faktisk kan en væskegennemstrømning have samme indvirkning på lyd som en sort hul kan have på lys. En måde at realisere dette på er ved at bruge en såkaldt Laval-dyse, der er en timeglasformet dyse, som det ses på figur 10.3 og som vi f.eks. genkender fra motorerne på rumfærger. Dysen er konstrueret på en sådan måde, at væsken kommer op på og faktisk overskrider lydens hastighed på det snævraste punkt på dysen. Den indkommende væske er subsonisk, dvs. dens hastighed er lavere end lydens, men grundet dysens indsnævring bliver væsken accelereret op til lydens hastighed. På den anden side af indsnævringen bliver væsken supersonisk, dvs. dens hastighed bliver større end lydens. Lydbølger i den subsoniske del kan bevæge sig mod strømmen, på bekostning af at deres bølgelængde bliver længere. Når væsken til gengæld har passeret indsnævringen, kan lydbølger ikke bevæge sig mod strømmen. Vi kan nu tydeliggøre analogien til det sorte hul. Den subsoniske del svarer altså til området $r > 2M$ (region I på Kruskal-diagrammet) hvor lyset rødforskydes, når det bevæger sig i den modsatte retning af tyngdefeltet. Den supersoniske del svarer til $r < 2M$ (region II på Kruskal-diagrammet), hvor en observatør ikke kan undslippe og har retning mod den uundgåelige singularitet $r = 0$. Indsnævringen på dysen svarer til horisonten $r = 2M$, der markerer overgangen mellem de to regioner.



Figur 10.2: Hawking- og Unruh-effekten. Til venstre ses en stationær observatør ved horisonten, der detekterer den termiske Hawking-stråling. Til højre ses en Rindler-observatør i vakuum, der detekterer Unruh-stråling. Illustration: Troels Marstrand



Figur 10.3: Øverst ses Laval-dysen. I den vestre del af dysen (den subsoniske) kan lydbølger bevæge sig mod strømmen og i den højre del af dysen (den supersoniske) kan lydbølgerne kun bevæge sig i samme retning som strømmen. De to regioner er adskilt af indsnævringen. Nederst ses en grafisk afbildning af det sorte hul for at tydeliggøre analogien.

Kapitel 11

Konklusion

I dette speciale har jeg lettet forståelsen af gravitationelle og kvantemekaniske aspekter af sorte huller ved at tage udgangspunkt i den specielle relativitetsteori. Jeg har kigget på den rolle, acceleration spiller i den specielle relativitetsteori og udledt egenaccelerationen, dvs. den acceleration en partikel oplever i sit hvilesystem. Jeg har dernæst vist, at bevægelsen for partikler, der undergår konstant egenacceleration, er givet ved hyperbolsk bevægelse og afbildes i Rindler-kilen, der er et underrum af Minkowski-diagrammet. Jeg har vist, at der i den specielle relativitetsteori opstår begivenhedshorisonter, en afgrænsning af rumtiden, hinsides hvilket begivenheder ikke kan påvirke den accelererende observatør. Jeg har tydeliggjort denne begivenhedshorizont (Rindlerhorisonten) ved at afbilde en accelererende observatør og en frakoblet observatør i Rindler-kilen og deres indbyrdes kommunikation i form af lyssignaler. Vha. ækvivalensprincippet, der siger, at accelerationen af en referenceramme i en bestemt retning lokalt har samme effekt som et tyngdefelt virkende i modsatte retning, har jeg forklaret, at der ligeledes opstår begivenhedshorisonter i et tyngdefelt og kommet frem til og forklaret begivenhedshorisonten for et sort hul, Schwarzschild-horisonten. Jeg har ydermere forklaret, at Schwarzschild-horisonten opstår pr. analogi på samme måde som Rindler-horisonten ved at betragte en ekstern observatør i et tyngdefelt og en indfaldende observatør, der følger en stjernes gravitationelle kollaps mod et sort hul.

Faktisk har det vist sig, at delelementer af specialet, nærmere betegnet hyperbolsk bevægelse og begivenhedshorisonter i den specielle relativitetsteori, faktisk ikke er urealistisk at arbejde med på gymnasieniveau, hvis det formuleres på en måde, der er tilpasset deres forhåndsviden. Der er her ikke tale om at lave grove approksimationer for at gøre stoffet mere tilgængeligt for gymnasieeleven, men blot at formulere det på en måde, der passer til deres niveau.

Dernæst er jeg gået mere i detalje med matematikken i den generelle relativitetsteori og fokuseret på Schwarzschild-metrikken med udgangspunkt i svagfelts-approksimationen til den generelle relativitetsteori og simple symmetribetragtninger for en ikke-roterende, uladet sfærisk symmetrisk massefordeling. Den viden har jeg brugt til at vise, at Schwarzschild-metrikken faktisk har samme form som Rindler-metrikken i omegnen af horisonten $r = 2M$. På den måde har jeg stillet den oprindelige forklaring af sorte huller ud fra speciel relativitetsteori og ækvivalensprincippet og analogien mellem Rindler-horisonten og Schwarzschild-horisonten i et skarpere lys.

Jeg har bygget videre på det opnåede kendskab og erfaring med Rindler-kilen og Schwarzschild-metrikken ved at introducere Kruskal-koordinaterne, der gør det muligt at visualisere et sort hul på samme måde som Rindler-kilen. Ved at studere Kruskal-diagrammet har vi også kunnet gøre rede for den gravitationelle singularitet ved $r = 0$, og på den måde har vi fået en relativt komplet forståelse af sorte huller, og de singulariteter de afføder.

I sidste del af specialet har jeg fokuseret på kvantemekaniske aspekter af sorte huller og er dykket ned i kvantefeltteori og genbrugt vores viden om Rindler-koordinater til at vise Unruh-effekten, der siger, at en Rindler-observatør i Minkowski-vakuumbetragtning faktisk detekterer et termisk spektrum af partikler. Igen har vi brugt ækvivalensprincippet til at forklare, at der opstår en tilsvarende effekt i et tyngdefelt, mere specifikt ved Schwarzschild-horisonten, hvilket betyder, at sorte huller rent faktisk ikke er sorte, men udsender stråling omkring horisonten.

Bilag A

Schwarzschild-løsningen

Formen på Schwarzschild-metrikken er givet ved

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.1})$$

For at lette notationen i det følgende, vil vi blot benævne koefficienterne A og B . Vi ønsker altså at bestemme koefficienterne A og B ud fra Einsteins feltligninger i vakuum

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ricci-tensoren R_{ab} kan udregnes ud fra Riemann-tensoren R_{bcd}^a , som er givet ved

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e, \quad (\text{A.3})$$

hvor “,” betegner den afledte og Christoffel-symbolet Γ er givet ved

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} - g_{bc,d} + g_{dc,b}). \quad (\text{A.4})$$

Ricci-tensoren R_{ab} kan som sagt findes ud fra Riemann-tensoren og er givet ved $R_{ab} = g^{cd}R_{cadb} = R_{adb}^d$, som vha. Christoffel-symbolerne er givet ved

$$R_{ab} = \Gamma_{ad,b}^d - \Gamma_{ab,d}^d + \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d - \Gamma_{ab}^c \Gamma_{dc}^d. \quad (\text{A.5})$$

Ricci-skalaren er givet ved $R = g^{ab}R_{ab}$, og da den også indeholder Ricci-tensoren R_{ab} , er (A.2) givet ved

$$R_{ab} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Ud fra Schwarzschild-metrikken kan vi se, at der optræder fire ikke-nul indgange i metrik-tensoren g_{ab} givet ved $g_{tt} = A$, $g_{rr} = -B$, $g_{\theta\theta} = r^2$ og $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$. Selve udregningerne er meget omfattende, men ligetil, så lad mit blot regne ét eksempel og postulere resten

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rd}(g_{dr,r} - g_{rr,d} + g_{dr,r}) \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{B'}{2B}, \quad (\text{A.9})$$

fordi $g^{rr} = B^{-1}$ og hvor “'” betegner den afledte specifikt mht. r .

De andre Christoffel-symboler findes på præcis samme måde og er givet ved $\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{A'}{2A}$, $\Gamma_{tt}^r = \frac{A'}{2B}$, $\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}$, $\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B}$, $\Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}$, $\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{B}$, $\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$, og $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$.

Nu udregnes Ricci-tensorerne

$$R_{tt} = \frac{A''}{2B} + \frac{A'}{Br} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4AB} \quad (\text{A.10})$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \left(\frac{r}{B}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) \quad (\text{A.11})$$

$$R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{B'}{rB} + \frac{A'B'}{4AB} + \frac{A'^2}{4A^2} \quad (\text{A.12})$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (\text{A.13})$$

Laver vi en linearkombination af R_{tt} og R_{rr} fås

$$BR_{tt} + AR_{rr} = 0, \quad (\text{A.14})$$

hvilket giver $A'B + AB' = 0$. Dette medfører at $AB = \text{konstant}$. Fra kapitel 8 ved vi at $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$, hvilket derfor medfører at $AB = 1$. Vha. $AB = 1$ kan vi skrive $A'B + AB' = 0$ som

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Indsætter vi (A.15) i (A.11) får vi

$$\left(\frac{r}{B}\right)' = (rA)' = 1, \quad (\text{A.16})$$

med løsningen $rA = r - \text{konstant}$. Kalder vi konstanten r_g har vi at

$$A = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (\text{A.17})$$

og

$$B = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (\text{A.18})$$

Vi ved at i svagfelts-approximationen gælder $g_{00} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 - 2M/r$. Ud fra det kan vi se at $r_g = 2M$ således at koefficienterne A og B endelig er givet ved

$$A = 1 - \frac{2M}{r} \quad (\text{A.19})$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (\text{A.20})$$

Bilag B

Kruskal-koordinater

Vi vil gerne vise, at vi ved indsættelse af Kruskal-koordinaterne (U, V) i Kruskal-metrikken får den velkendte Schwarzschild-metrik. Da vinkeldelen af begge metrikker, (θ, ϕ) er den samme, vælger vi at udelade denne fra metrikken, og skriver rumtidsintervallet dt^2 i stedet for ds^2 , for at markere fraværet af vinkeldelen. Kruskal-metrikken er givet ved

$$dt^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} (dV^2 - dU^2), \quad (\text{B.1})$$

og Kruskal-koordinaterne er givet ved

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \\ V &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Vi vil altså vise, at ved indsættelse af (B.2) i (B.1) fås Schwarzschild-metrikken

$$dt^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 \quad (\text{B.3})$$

Vi skal derfor udregne differentialerne dV og dU . Lad os starte med dV

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial r} dr \quad (\text{B.4})$$

Første led er givet ved

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \frac{1}{4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{B.5})$$

$$\equiv A(r) \cosh\left(\frac{t}{4m}\right), \quad (\text{B.6})$$

hvor vi, for at lette notationen, har kaldt funktionen foran $\cosh(t/4m)$ for $A(r)$, der ikke skal forveksles med frontfaktoren fra Schwarzschild-metrikken.

Det andet led i dV er givet ved

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1/2} \frac{1}{2m} e^{r/4m} + \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} \frac{1}{4m} e^{r/4m} \right] \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{e^{r/4m}}{4m} \left[\left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1/2} + \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} \right] \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{e^{r/4m}}{4m} \frac{r}{2m} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1/2} \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{e^{r/4m}}{8m^2} r \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1/2} \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (\text{B.10})$$

$$\equiv B(r) \sinh \left(\frac{t}{4m} \right), \quad (\text{B.11})$$

hvor vi tilsvarende har kaldt frontfaktoren for $B(r)$. Indsættes begge led i dV fås

$$dV = A(r) \cosh \left(\frac{t}{4m} \right) dt + B(r) \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) dr \quad (\text{B.12})$$

Differentialet dU er på tilsvarende vis givet ved

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial r} dr \quad (\text{B.13})$$

Første led giver

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4m} \frac{1}{4M} \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$= A(r) \sinh \left(\frac{t}{4m} \right), \quad (\text{B.15})$$

og andet led givet

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1/2} e^{r/4m} + \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{1/2} \frac{1}{4} e^{r/4m} \right] \cosh \left(\frac{t}{4m} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$= B(r) \cosh \left(\frac{t}{4m} \right). \quad (\text{B.17})$$

Sammenlagt fås differentialet

$$dU = A(r) \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) dt + B(r) \cosh \left(\frac{t}{4m} \right) dr. \quad (\text{B.18})$$

Nu kan vi udregne parentesens i (B.1)

$$dV^2 - dU^2 = A(r)^2 \cosh^2 \left(\frac{t}{4m} \right) dt^2 + B(r)^2 \sinh \left(\frac{t}{4m} \right) dr^2 \quad (\text{B.19})$$

$$- A(r)^2 \sinh^2 \left(\frac{t}{4m} \right) dt^2 - B(r)^2 \cosh \left(\frac{t}{4m} \right) dr^2 \quad (\text{B.20})$$

$$= A(r)^2 dt^2 - B(r)^2 dr^2, \quad (\text{B.21})$$

hvor vi har brugt den velkendte $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ og det faktum at krydsleddet fra kvadratsætningen giver nul. Indsættes nu i (B.1) har vi

$$dt^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} (dV^2 - dU^2) \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} (A(r)^2 dt^2 - B(r)^2 dr^2) \quad (\text{B.23})$$

Nu kan vi udregne de to led i ovenstående, hvor vi indsætter $A(r)$ og $B(r)$. Første led giver

$$\frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} A(r)^2 dt^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} \frac{1}{16m^2} e^{r/2m} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) dt^2 \quad (\text{B.24})$$

$$= \frac{2m}{r} \left(\frac{2m}{r} - 1 \right) dt^2 \quad (\text{B.25})$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2, \quad (\text{B.26})$$

og andet led giver

$$\frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} B(r)^2 dr^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2m} \frac{e^{r/2m}}{64m^4} r^2 \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1} dr^2 \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{r}{2m} \left(\frac{r}{2m} - 1 \right)^{-1} dr^2 \quad (\text{B.28})$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2. \quad (\text{B.29})$$

Indsættes begge led fås

$$dt^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dr^2, \quad (\text{B.30})$$

hvilket var det vi ville vise.

Litteratur

- [1] N.D. Birrell og P.C.W Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, 1982.
- [2] M. Born, *The Theory of the Rigid Electron in the Kinematics of the Principle of Relativity. Annalen der Physik*, **335**, 1, 1909.
- [3] S.M. Carroll, *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, 2004.
- [4] P. Chen og T. Tajima, *Testing Unruh Radiation with Ultraintense Lasers. Phys. Rev. Lett.*, **83**, 256, (1999).
- [5] A. Einstein og N. Rosen, *The Particle Problem in the General Theory of Relativity. Phys. Rev.*, **48**, 73, (1935).
- [6] D. Finkelstein, *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. Phys. Rev.*, **110**, 965, (1958).
- [7] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Pearson, 2013, 4. udgave.
- [8] J.B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley, 2003.
- [9] S.W. Hawking, *Black hole explosions? Nature*, **248**, 30, (1974).
- [10] T.A. Jacobson og R. Parentani, *An Echo of Black Holes. Scientific American*, **293**, 68, (2005).
- [11] M.D. Kruskal, *Maximal Extension of Schwarzschild Metric. Phys. Rev.*, **119**, 1743, (1959).
- [12] L.D. Landau og E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, 1975, 4. udgave.
- [13] J. Michell, *On the Means of discovering the distance, magnitude and color of the fixed stars. Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **74**, 35, (1784).
- [14] C. Misner, K. Thorne og J. Wheeler, *Gravitation*, W.H Freeman, 1973.
- [15] J. R. Oppenheimer og H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev.*, **56**, 455, (1939).
- [16] A. Pais, *Subtle is the Lord*, Oxford University Press, 1982.

- [17] M.E. Peskin og D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [18] W. Rindler, *Relativity: Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2001.
- [19] L. Sartori, *Understanding Relativity*, University of California Press, 1996.
- [20] K. Schwarzschild, *On the Gravitational Field of a Point Mass, According to Einstein's Theory. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, **7**, 189, (1916).
- [21] L. Susskind og J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution*, World Scientific, 2005.
- [22] E.F. Taylor og J.A. Wheeler, *Spacetime Physics*, W.H. Freeman, 1963.
- [23] U. Uggerhøj, *Tid - Den relative virkelighed*, Aarhus Universitetsforlag, 2006.
- [24] U. Uggerhøj, *Tid, i serien Tænkepauser*, Aarhus Universitetsforlag, 2014.
- [25] U. Uggerhøj, *Speciel relativitetsteori*, Aarhus Universitetsforlag, 2016.
- [26] W. G. Unruh, *Notes on black-hole evaporation. Phys. Rev. D*, **14**, 870, (1976).
- [27] W.G. Unruh, *Dumb holes: analogues for black holes. Phil. Trans. R. Soc. A*, **366**, 2905, (2008).
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, 1972.