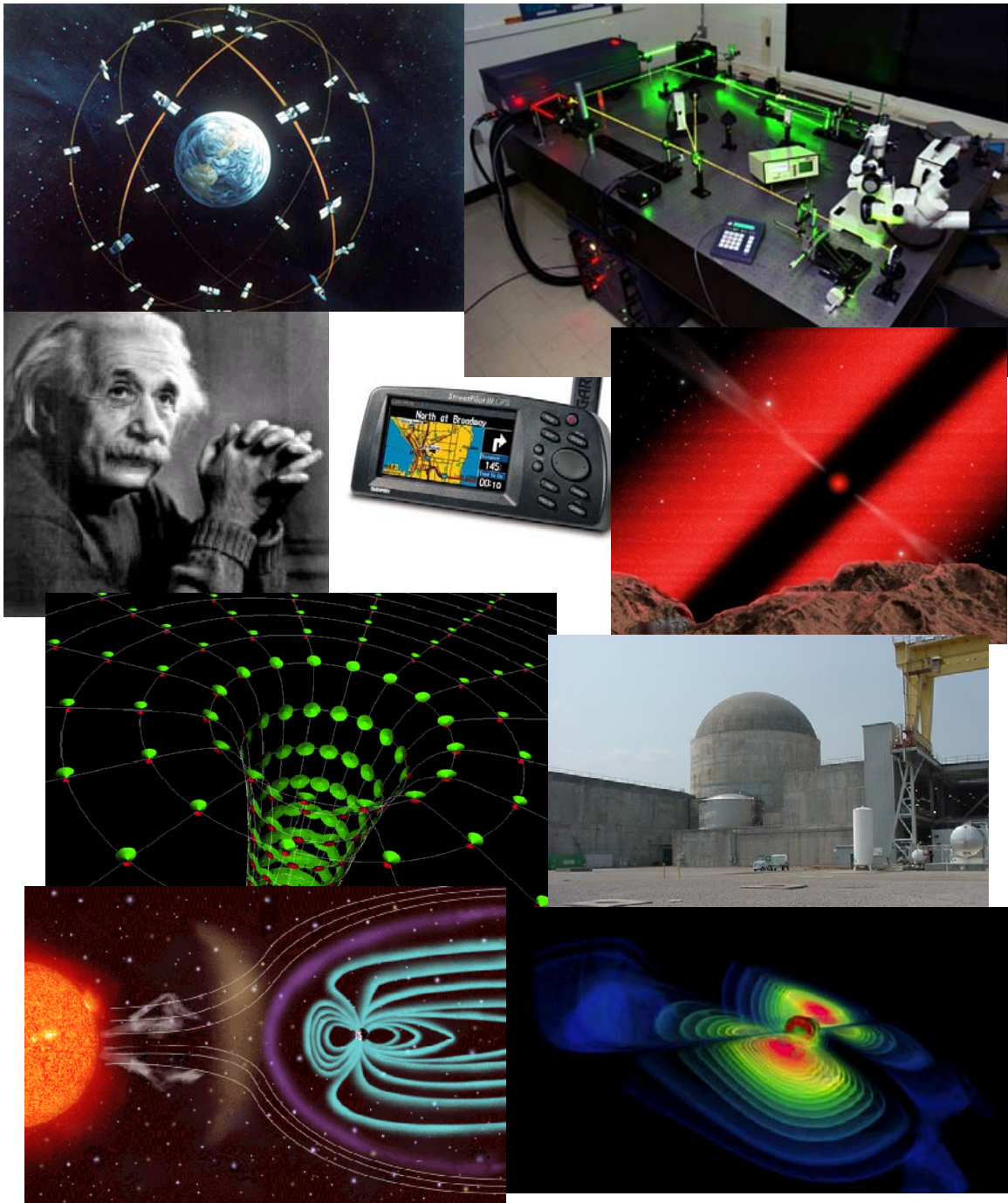


Ekperimentelle øvelser i Speciel Relativitetsteori

(første øvelsesgang i uge 36)



Eksperimentelle øvelser i speciel relativitetsteori

Indledning

Hvad er det der gør relativitetsteorien spændende og vedkommende efter mere end et helt århundrede?

- Den er efterhånden dagligdags relevant: Du er som 'relativist' næsten forpligtet til at fortælle feks. taxa-chaufføren at hans GPS-navigation er baseret på relativitetsteori.
- Der er meget der tyder på at det kommende århundredes astronomi vil have tyngdebølger som et vigtigt element – denne type bølger kan forstås ud fra relativitetsteorien.
- Langt størstedelen af nutidens accelerators kan kun forklares baseret på at relativitetsteoriens resultater er rigtige – du får en af acceleratorene at se i løbet af kurset.
- At Solen skinner kan forstås som et resultat fra relativitetsteorien
- Energiproduktionen i mange lande er baseret på kernekraft der kan ses som masse der omsættes til energi – et resultat fra relativitetsteorien som behandles i en øvelse
- Modellen for Universets udvikling – kosmologien - forstås idag bla. ud fra relativitetsteorien
- Et utal af astronomiske observationer er kun forståelige på baggrund af relativitetsteorien: Neutronstjerner, supernovaer, sorte huller, tyngdelinser etc.
- Relativitetsteorien er en intellektuel udfordring: Den er matematisk set temmelig (eller måske snarere relativt ☺) simpel, men den er begrebsmæssigt set overraskende og af og til mod-intuitiv. Det kræver derfor en indsats at forstå den rigtigt, men den er på den anden side indenfor rækkevidde af næsten enhver.

Øvelsernes formål:

Der er flere formål med øvelserne: 1) At illustrere og give følelsen af med egne hænder at have udført et 'klassisk' eksperimentelt forsøg, 2) at give kendskab til eksperimentel praksis og metode, 3) at gøre dig bekendt med flere forskellige typer måleudstyr og endelig 4) at fjerne eller ihvertfald mindske en eventuel 'berøringsangst' ved sofistikeret udstyr.

Med 'klassisk' menes, at det er et eksperiment der utvivlsomt har haft afgørende indflydelse på udviklingen af fysikken – i det mindste i princippet. Som eksempel kan nævnes Fizeaus forsøg som er det eneste Einstein selv nævnte som kilde til inspiration for hans specielle relativitetsteori. Fizeaus eksperiment er således essentielt for f.eks. at kunne lave et studium af Einsteins indgang til den specielle relativitetsteori. Det er håbet at de gennemgåede eksperimenter vil gøre det lettere og mere nærværende for dig at relatere til det nye emne.

Tidsplan:

Hold	Gruppe	Uge 36	Uge 37	Uge 38	Uge 39	Uge 40	Uge 41
1	1	Ø1-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø6-T1	Ø5-T1	FB3-T1
1	2	Ø2-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø1-T1	Ø6-T1	FB3-T1
1	3	Ø3-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø2-T1	Ø1-T1	FB3-T1
1	4	Ø4-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø3-T1	Ø2-T1	FB3-T1
1	5	Ø5-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø4-T1	Ø3-T1	FB3-T1
1	6	Ø6-T1	FB1-T1	FB2-T1	Ø5-T1	Ø4-T1	FB3-T1
FY1	7	FB1-T2	Ø1-T2	FB2-T2	Ø6-T2	FB3-T2	Ø5-T2
FY1	8	FB1-T2	Ø2-T2	FB2-T2	Ø1-T2	FB3-T2	Ø6-T2
FY1	9	FB1-T2	Ø3-T2	FB2-T2	Ø2-T2	FB3-T2	Ø1-T2
FY1	10	FB1-T2	Ø4-T2	FB2-T2	Ø3-T2	FB3-T2	Ø2-T2
FY1	11	FB1-T2	Ø5-T2	FB2-T2	Ø4-T2	FB3-T2	Ø3-T2
FY1	12	FB1-T2	Ø6-T2	FB2-T2	Ø5-T2	FB3-T2	Ø4-T2
FY2	13	Ø1-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø6-T3	Ø5-T3	FB3-T3
FY2	14	Ø2-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø1-T3	Ø6-T3	FB3-T3
FY2	15	Ø3-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø2-T3	Ø1-T3	FB3-T3
FY2	16	Ø4-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø3-T3	Ø2-T3	FB3-T3
FY2	17	Ø5-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø4-T3	Ø3-T3	FB3-T3
FY2	18	Ø6-T3	FB1-T3	FB2-T3	Ø5-T3	Ø4-T3	FB3-T3
FY3	19	FB1-T4	Ø1-T4	FB2-T4	Ø5-T4	FB3-T4	Ø4-T4
FY3	20	FB1-T4	Ø2-T4	FB2-T4	Ø6-T4	FB3-T4	Ø5-T4
FY3	21	FB1-T4	Ø3-T4	FB2-T4	Ø1-T4	FB3-T4	Ø6-T4
FY3	22	FB1-T4	Ø4-T4	FB2-T4	Ø2-T4	FB3-T4	Ø1-T4
FY3	23	FB1-T4	Ø5-T4	FB2-T4	Ø3-T4	FB3-T4	Ø2-T4
FY3	24	FB1-T4	Ø6-T4	FB2-T4	Ø4-T4	FB3-T4	Ø3-T4

Forklaring:

Ø1-T1 betyder Øvelse 1 i tidsrummet for Hold 1: tirsdag 11-14

Ø4-T2 betyder Øvelse 4 i tidsrummet for FY1: tirsdag 9-12

Ø3-T3 betyder Øvelse 3 i tidsrummet for FY2: torsdag 9-12

Ø2-T4 betyder Øvelse 2 i tidsrummet for FY3: mandag 13-16 etc.

I uge 39 er vi nødt til at indføre en undtagelse for hold1 og FY1, idet der ellers kommer overlap:

Dvs **kun uge 39.**: Hold 1: tirsdag 11.30-14; FY1: tirsdag 9-11.30

Forskningsgruppe besøg:

FB3-T1 betyder Forskningsgruppe 3 Besøg i tidsrummet for hold 1 etc. (dog kun 2t.), dvs:

FB1-T1, **Hold 1: tirsdag 12-14**

FB1-T2, **FY1: tirsdag 9-11**

FB1-T3, **FY2: torsdag 9-11**

FB1-T4, **FY3: mandag 13-15**

Forskningsgruppebesøg har ikke nødvendigvis relation til relativitetsteori – de skal bidrage til 'perspektivering', så I får et indtryk af hvad nogle af grupperne laver her på stedet.

Hver gruppe til øvelserne består af 4-5 studerende, og **opdeling** fastlægges ved første øvelsesgang hvor alle mødes i 1525-419. Ved **forskningsgruppebesøg** er mødestedet i forhallen ved informationen.

Øvelsernes navne:

Øvelse 1: Måling af lysets hastighed

Øvelse 2: Hvilemassens energi

Øvelse 3: Myonens levetid

Øvelse 4: Michelson-Morleys eksperiment

Øvelse 5: Elektronens relativistiske masse

Øvelse 6: GPS systemet

Lokaler: Ø2, Ø3 og Ø4: 1525-419

Ø1, Ø5 og Ø6: Tandem targethal

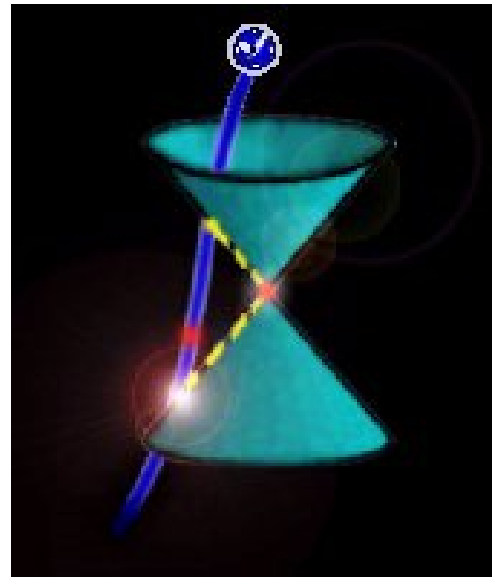
FB1: Ion-fælde-lab. (Michael Drewsen)

FB2: STM-lab. (Erik Lægsgaard)

FB3: ASTRID-hal (Niels Hertel)

FB1-3: Mødested i forhallen

Første øvelsesgang: **ALLE** mødes i 1525-419



Forelæsningerne i uge 36 (man. 10-12) og 38 (ons. 11-12) benyttes til at introducere udstyr og øvelser samt diskussioner af 'klassiske' eksperimenter.

Vigtigt: Det er absolut nødvendigt at møde velforberejet til øvelserne – eksperimentalfysik er sjovt, men kun hvis man forstår hvad det handler om! (til første øvelsesgang kan I skimme hele vejledningen, da I ikke ved hvilken øvelse der bliver tildelt)

Godkendelse: Laboratoriedelen godkendes ved **fremmøde**, **aktiv deltagelse** samt **godkendt journal** der afleveres og om muligt godkendes umiddelbart efter øvelsens afslutning. Journalen skal føres under udførelsen og skal kort, men præcist, beskrive øvelsens formål og forløb.

Instruktører: Heine D. Thomsen (kontor: 1520-437) og Ulrik Uggerhøj (kontor: 1525-328)

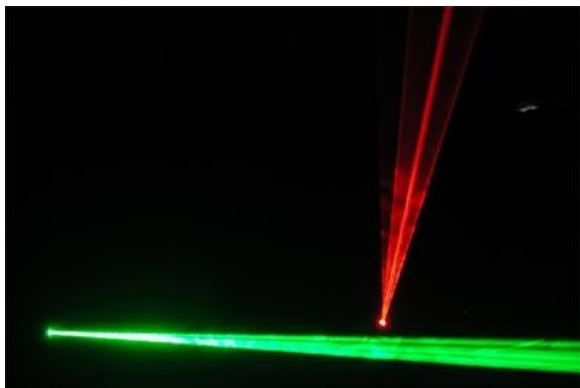
God fornøjelse!

Indhold:

Øvelse 1: Måling af lysets hastighed,	s. 7
Øvelse 2: Hvilemassens energi,	s. 9
Øvelse 3: Myonens levetid,	s. 13
Øvelse 4: Michelson-Morleys eksperiment,	s. 18
Øvelse 5: Elektronens relativistiske masse,	s. 20
Øvelse 6: GPS systemet,	s. 24

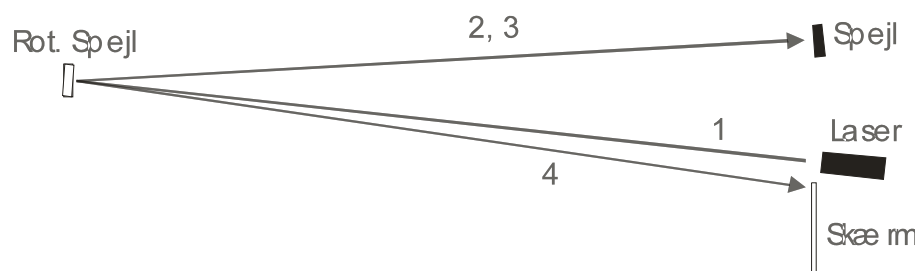
Øvelse 1: Måling af lysets hastighed

Det er en af de to hjørneste i den specielle relativitetsteori at lysets fart, c , er konstant og endelig for alle observatører. En af årsagerne til at de relativistiske effekter ikke griber afgørende ind i vores dagligdag er at lysets fart dog er uhyre høj. Dette gør også målingen af c til et lidt krævende eksperiment.



Dette eksperiment har rødder fra årene 1850-1878 hvor Foucault og derefter Michelson bestemte lysets fart ved lignende metoder. Princippet er ganske simpelt: Man sender lys fra en laser (1) mod et roterende spejl hvorfra det sendes videre (2) til et andet spejl der kaster lyset tilbage (3). På grund af lysets udbredelseshastighed tager det et vist tidsrum for det

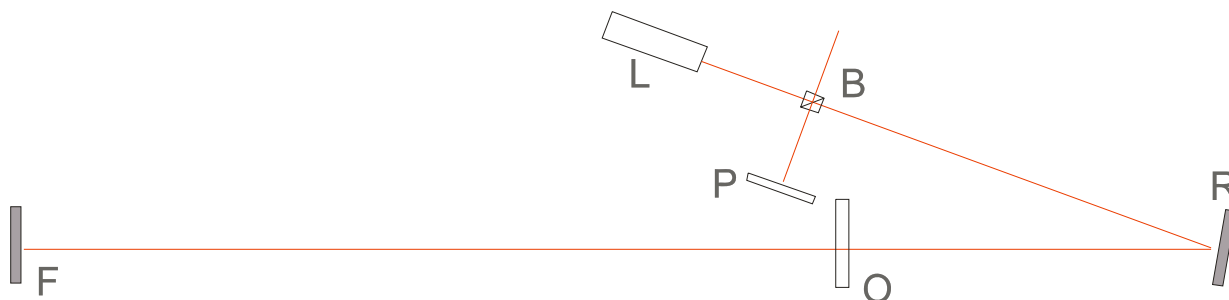
at vende tilbage til det roterende spejl. I dette tidsrum har spejlet roteret en (lille) vinkel hvorfor lyset ikke længere returneres (4) til den oprindelige kilde, men til en skærm hvorpå forskydningen kan registreres. Kender man rotationshastigheden for det roterende spejl og afstandene kan lysets



fart bestemmes. En skitse af den principielle opstilling er vist i figuren.

Der er imidlertid nogle

tekniske detaljer der komplicerer eksperimentet lidt, men som på den anden side gør at man kan måle lysets fart temmelig præcist. Den ønskede opstilling er vist i figur 2. Her illustreres laseren L , en beam-splitter, B , det roterende spejl, R , en optisk linse, O , det faste spejl, F og den positionsfølsomme lysdetektor, P . Afstanden mellem L og B kaldes i det følgende d_{LB} og så fremdeles. Brændvidden på den optiske linse er 5000 mm. For at opnå et rimeligt kompromis mellem lysmængden og flytningen af laserpletten på P kan det vises at afstandene skal være: $d_{LR} = 5.00$ m, $d_{RO} = 5.00$ m, $d_{OF} = 10.00$ m, hvorimod afstanden d_{LB} stort set er underordnet, men kan vælges til f.eks. 0.5 m (og $d_{PB} = d_{LB}$).

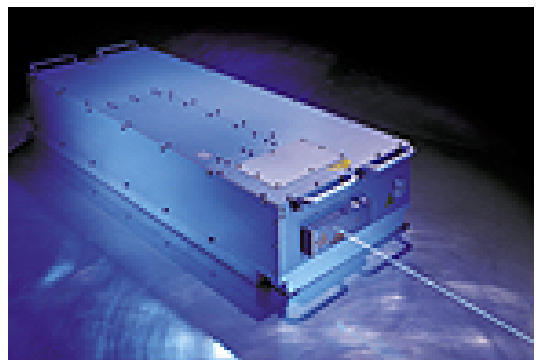


Fremgangsmåden under opstillingen og opliniering af linser og spejle er at begynde fra laseren og følge lyspletten til det roterende spejl, derfra til linsen og videre til det faste spejl. Fokuser laseren på det roterende spejl vha. den lille 'skruetrækker med hul'. Det roterende spejl i 'boremaskinen' kan indstilles manuelt vha. den lille stilleskrue, der hænger i en kæde derved. Husk at tage stilleskruen ud umiddelbart efter brug, hver gang! Spejle og linsen stilles således at lyspletten rammer/passerer nogenlunde på/igennem centrum.

Herefter indstilles det faste spejl således at den reflekterede stråle (3) løber tilbage langs den indkommende (2). Et stykke hvidt karton (til observation af (3)) med et lille hul i (til passage af (2)) er her ret nyttigt. Det er her i eksperimentalfysik som i teoretisk fysik – det kræver for de fleste en del held (og gerne talent) at gøre det helt rigtigt første gang! Så bliv ikke overrasket hvis dette punkt kræver en ihærdig indsats, begynd tæt ved det faste spejl og bevæg jer derefter ned mod linsen og derefter videre til det roterende spejl. To pletter ((1) og (3)) på det roterende spejl er i mange tilfælde nok til at udføre forsøget, men for at være sikker kan pletten følges tilbage til laseren hvor (4) bør dække (1) så længe det roterende spejl står stille. Herefter indsættes beamsplitteren så (1) delvist sendes væk fra P , altså så (4) delvist sendes hen mod skærmen. I bør nu kunne se en klar plet på et stykke hvidt papir indsat foran P . Verificer at det er en del af den reflekterede stråle ved feks. at sætte hånden ind i (2).

Check en ekstra gang at stilleskruen ikke er glemt isat det roterende spejl. Nu kan ledningerne fra 'boremaskinen' sættes i variotransformereren, der basalt set bare er en vekselspændingskilde med variabel styrke. Sæt aldrig spændingen højere end 240 V!

For at finde spejlets rotationsfrekvens, ν , eller rettere lyspulsernes frekvens som er den dobbelte (hvorfor mon?) stilles en fotodiode udenfor den benyttede strålegang. Roter spejlet indtil lyset rammer



fotodioden i midten. Nu kan fotodioden tændes (ON) og forbindes til et digitalt oscilloskop der indstilles på 1ms, 5.00 mV, *trigger*: normal, DC, rising – pulsen ligner lidt en savtak-puls med en stejl flanke. Frekvensen kan nu måles ved at benytte *Cursor* og flytte markørerne med *Vertical Position* hvorefter frekvensen kan udlæses. Alternativt kan benyttes *Measure* med *source, ch1*. Ved omkring 240 V fås en puls-frekvens på ca. 1 kHz. Husk at slukke fotodioden efter brug.

Plettens (4) flytning på skærmen kan enten afmærkes med blyant som funktion af rotationsfrekvensen eller man kan benytte den positionsfølsomme lysdetektor der dog først skal kalibreres. Begge dele gøres lettest i mørke! En lineær regression af data-punkterne (hvor forskydningen ved frekvens 0 med rimelighed kan tvinges til at være 0) giver lysets fart ud fra

$$c = 2 d_{FR} 2\pi\nu 2 d_{OR}/s = 24\pi\nu d_{OR}^2/s$$

hvor ν er rotationsfrekvensen og s er flytningen af laserpletten på skærmen, P . Dette resultat fremkommer idet spejlet roterer vinklen φ mens lyset tilbagelægger afstanden $2d_{FR}$ i tiden $t = \varphi/2\pi\nu$ og flytningen $s = 2d_{OR}\varphi$ og det er benyttet at $d_{FR} = 3d_{OR}$. Hvis s afbildes som funktion af ν

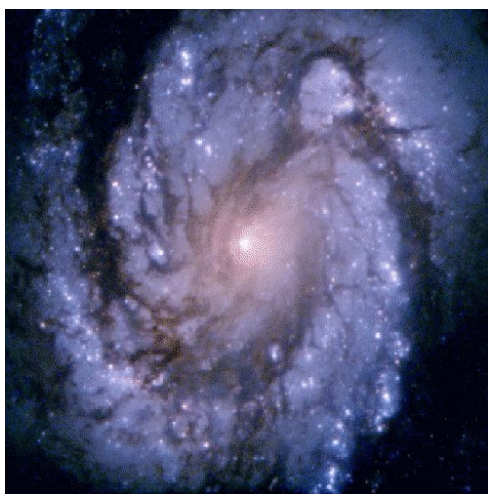


fås c derfor fra hældningen ud fra $c = 24\pi d_{OR}^2/\alpha$, hvor α er hældningskoefficienten.

Kig ikke ind i laseren! Den er ikke farlig (1 mW i øjet er den acceptable grænse), men alle steder i den eksperimentelle fysik der har med stråling at gøre gælder ALARA: As Little/low As Reasonably Achievable.

Øvelse 2: Hvilemassens energi

I stjernerne foregår løbende en lang række kernereaktioner. Mange af de lettere grundstoffer som vi finder i naturen, inklusive nogle af dem som vi selv er lavet af, er skabt ved disse reaktioner, og de tungere grundstoffer er skabt i stjerner der har endt deres dage i en supernovaeksplosion.

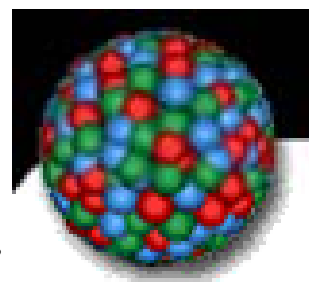


Når Solen og andre stjerner udstråler energi, skyldes det energifrigørelse fra kernereaktionerne. Disse reaktioner foregår tæt ved stjernernes meget varme centre, og energifrigørelsen sker på bekostning af en masseændring, idet hvilemassen omdannes til kinetisk energi. Ifølge Einsteins masse-energi relation er energifrigørelsen, $\Delta E = \Delta mc^2$.

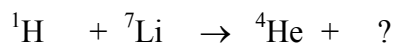
Kun en lille del (ca. 1%) af hvilemassen omdannes til elektromagnetisk stråling. Hovedprocessen i yngre stjerner, som f.eks. Solen, er at fire brintkerner netto omdannes til én heliumkerne. Energifrigørelsen kan finde sted som følge af masseforskellen mellem brintatomerne og heliumatomet: $4m_{\text{H}}c^2 - m_{\text{He}}c^2 = 26.7 \text{ MeV}$. Den "simple" nettoomdannelse af brint til helium foregår imidlertid gennem flere forskellige rækker af mere eller mindre komplekse kernereaktioner og henfaldsprocesser.

En af disse kernereaktioner er ${}^1\text{H} + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$, som vi skal undersøge i dette forsøg. Den samme proces undersøgt af Cockcroft og Walton i 1932, i et historisk eksperiment hvor de efterviste masse-energiækvivalensen. Med acceleratoren i Rutherford's laboratorium i Cambridge accelererede de brintioner op til en energi på 270 keV og skød brintionerne mod ${}^7\text{Li}$ -kerner.

Lader vi et stof bestråle med energirige kerner, vil der ofte være mulighed for en kernereaktion, hvor der sker en omdannelse af atomkerner i det bestrålede stof. De energirige kerner kan stamme fra en radioaktiv kilde (f.eks. α -partikler, d.v.s. ${}^4\text{He}$), en reaktor (f.eks. neutroner) eller en accelerator (f.eks. ${}^1\text{H}$, ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$ og tungere kerner som ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{35}\text{Cl}$, ${}^{197}\text{Au}$)

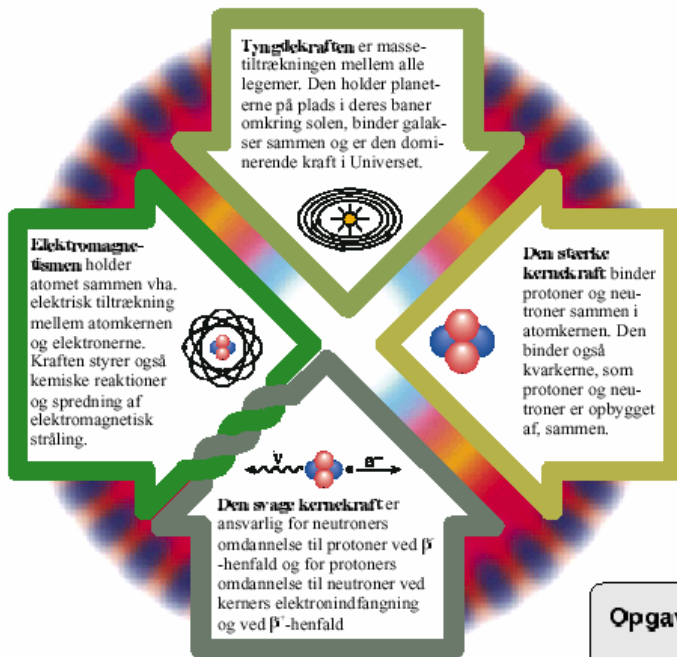


Som eksempel på sådanne eksperimenter vil vi studere tre kernereaktioner:



... benyt nukleontalsbevarelse samt ladningsbevarelse til at finde de manglende reaktionsprodukter.

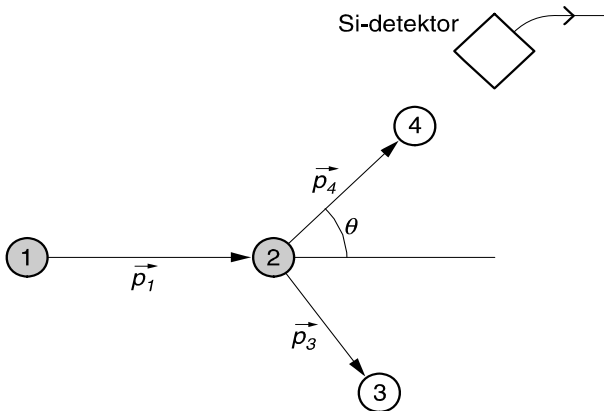
Ved forsøgene vil vi benytte en Van de Graaff-accelerator af en type som er i stand til at accelerere ladede kerner igennem et spændingsfald på op til 400 kV. Vi vil undersøge de ovennævnte



kernereaktioner ved at beskyde LiF med protoner (brintkerner: $^1\text{H}^+$) i energiområdet 300-350 keV og undersøge den kinetiske energi af de kerner der kommer ud.

Kernernes bindinger skyldes *de stærke kernekrafter*, som er en af de fire fundamentale naturkræfter, illustreret i figuren. De stærke kernekrafter er meget *korttrækkende*: tiltrækningen mellem nukleoner og er kun effektive over afstande

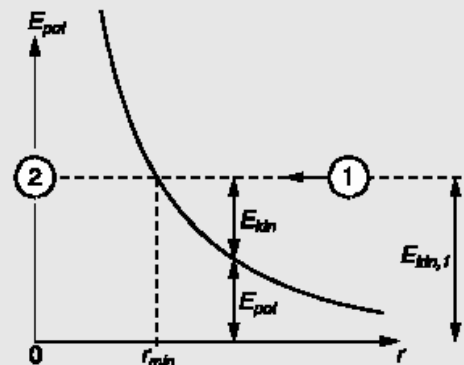
i femtometer-området ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$), hvorfor to kerner må bringes næsten klos op ad hinanden, før de kan reagere.



En af de vigtige fysiske størrelser, vi kan bestemme eksperimentelt i kernereaktioner er Q -værdien, d.v.s. den energi, der frigøres ved en given kernereaktion.

I figuren ovenfor er gengivet en almindelig situation ved stødprocesser. Kerne 1 skydes ind på et target bestående af atomkerner af

Opgave 1 (regnes hjemmefra)



Figur 3: Energiomdannelsen når kerne 1 nærmer sig kerne 2.

For at danne en kernereaktion skyder vi kerne 1 (kinetisk energi $E_{kin,1}$, ladningstal Z_1) direkte mod en targetkerne 2 (i hvile, ladningstal Z_2). Pga. ladningsfrastødningen vil den kinetiske energi af kerne 1 blive omdannet til potentiel energi, når kerne 1 nærmer sig kerne 2:

$$E_{pot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z_1e)(Z_2e)}{r}$$

hvor r er afstanden mellem kerne 1 og kerne 2. Antag fx i det følgende at kerne 1 = ^1H , kerne 2 = ^7Li , og $E_{kin,1} = 300 \text{ keV}$.

- Beregn den mindste afstand, r_{min} , som vi kan forvente at kernernes centre når fra hinanden.

Li-kernen har en middelfradius på ca 2.5 fm.

- Kommer kerne 1 (H) tæt nok på kerne 2 (Li) til at de "rører hinanden"?

I praksis vil protonen reagere med Li-kernen. Dette skyldes at protonens position - ved den impuls protonen her har - vil have en vis "udtværing" (de Broglie-bølgelængde), hvilket er beskrevet i kvantemeknikken. Desuden er Li-kernens radius i praksis "udtværet" omkring ovennævnte middelværdi.

Mellem begyndelses- og slutttilstand gælder bevarelse af impuls og energi:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \text{ og } E_1 + E_2 = E_3 + E_4.$$

Energierne er kernernes *total*energier. Problemet beskrives korrekt v.h.a. relativitetsteorien, ifølge hvilken den totale energi, E , af en kerne i sin grundtilstand er lig med summen af grundtilstandens hvilemasseenergi, m_0c^2 , og dens kinetiske energi E_{kin} : $E = E_{kin} + m_0c^2$

Hvis vi indsætter dette i energibevarelseligningen, ser vi at en tilvækst i kinetisk energi svarer til en reduktion i den samlede hvilemasse: $E_{kin,3} + E_{kin,4} - E_{kin,1} - E_{kin,2} = -(m_{0,3} + m_{0,4} - m_{0,1} - m_{0,2})c^2$ d.v.s. $\Delta E_{kin} = -(m_{0,3} + m_{0,4} - m_{0,1} - m_{0,2})c^2$. På højresiden af denne ligning står frigørelsen af hvilemasseenergi ved reaktionen, hvilket er definitionen på dens Q -værdi:

$$Q = (m_{0,1} + m_{0,2} - m_{0,3} - m_{0,4})c^2$$

I eksperimenterne kan vi måle kerners kinetiske energier. Lader vi kerne 2 være i hvile før reaktionen, d.v.s. $E_{kin,2} = 0$, bliver den eksperimentelle bestemmelse af Q -værdien derfor: $Q_{exp} = E_{kin,3} + E_{kin,4} - E_{kin,1}$

Vi kan placere detektoren i en vilkårlig vinkel, θ , og måle den kinetiske energi af den kerne der rammer detektoren; denne kerne kalder vi kerne 4. Vi behøver ikke at måle den kinetiske energi af kerne 3, for idet i den urelativistiske grænse $E_{kin} = \frac{1}{2}m_0v^2$ og $p = m_0v$, kan vi omskrive til: $Q_{exp} = (p_3)^2/2m_{0,3} + E_{kin,4} - E_{kin,1}$. Ved at bruge impulsbevarelsen: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$ kan vi nu finde kvadratet af impulsen for kerne 3: $(p_3)^2 = (p_1)^2 + (p_4)^2 - 2p_1p_4\cos\theta$. Dette udtryk indsætter vi og har så endelig:

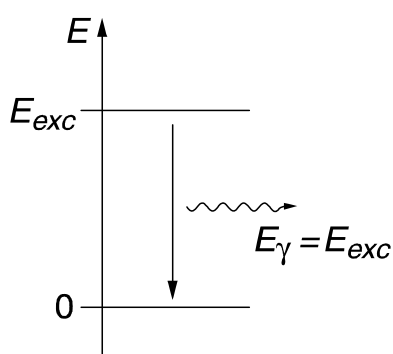
$$Q_{exp} = E_{kin,1}(m_{0,1}/m_{0,3} - 1) + E_{kin,4}(m_{0,4}/m_{0,3} + 1) - 2\cos\theta (E_{kin,1}m_{0,1}/m_{0,3} E_{kin,4}m_{0,4}/m_{0,3})^{1/2}$$

Gennemgå selv regningerne og verificer at de er korrekte.

Den sidste ligning viser altså, at hvis vi kender $E_{kin,1}$, er det muligt at bestemme reaktionernes Q -værdi ved at placere detektoren i en kendt vinkel θ og optage et *energisppektrum*, d.v.s. måle hvilke bestemte kinetiske energier $E_{kin,4}$ som den ene af de dannede kerner kan have, når denne kerne bliver udsendt i retning mod detektoren. Disse energier ses som *toppe* i spektret.

For at bruge ligningen på en bestemt top må vi først gætte på, hvilken reaktion toppen hidrører fra. Kandidater til den rigtige reaktion må vi nødvendigvis vælge blandt de reaktioner, som har $Q > -E_{kin,1}$. Med vort bud på, hvilken reaktion der forårsager toppen, kan vi da indsætte i ligning (11) og finde Q_{exp} for toppen. Denne sammenlignes endelig med den teoretiske værdi.

Optag et energisppektrum: feks. med $E_{kin,1} = 330$ eller 343 keV og identificer toppene i spektret på



baggrund af de forventede Q -værdier.

Det er imidlertid ikke altid at vi er så heldige, at alle kernerne vi regner på dannes i deres grundtilstand, som det antages ovenfor.

Det kan således ske, at kerne 3 (eller 4) dannes i en exciteret tilstand, og hvis denne har en excitations-energi, E_{exc} , vil vi da

måle en eksperimentel Q -værdi, der er E_{exc} mindre end den teoretiske værdi, der fås ud fra hvilemasserne i kernernes grundtilstand: $Q_{exp} = Q - E_{exc}$.

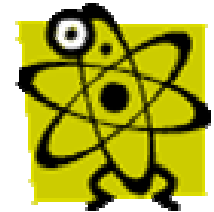
Eksperimentelt kan vi undersøge, om exciterede tilstande dannes ved at måle, om der udsendes γ -stråling fra kernereaktionerne. Ved henfald til grundtilstanden vil den målte γ -energi da være lig med E_{exc} - så vha. ligning (12) kan processen også i dette tilfælde verificeres.

Typisk måleprogram:

1) Kalibrer energiskalaen for partikeldetektoren med en velkendt α -kilde (feks. ^{228}Th , ^{239}Pu , ^{241}Am eller ^{244}Cm og datteraktiviteter).

2) Optag kernespektre for protonenergi på 330 og 343 keV (resonansenergi) mod et LiF target. Måletid per energi: ca. 15 minutter. Mål energierne i mindst én detektorvinkel (feks. $\theta = 160^\circ$ og/eller $\theta = 120^\circ$). Disse data anvendes til Q -værdi-bestemmelse og til identifikation af de forskellige optrædende reaktioner.

3) Undersøg om exciterede tilstande dannes i kernereaktionerne ved at optage et γ -spektrum ved "resonans-energien" og ved en anden protonenergi. Vi benytter en stor gamma-detektor, der anbringes uden for spredningskammeret. Gamma-detektoren energikalibreres med radioaktive kilder, og også baggrundsstrålingen måles.



Eventuelt kan elektronens hvilemasse bestemmes ud fra analyse af γ -spektrene. Den såkaldte escape-linie stammer fra annihilation (tilintetgørelse) af en positron – elektronens antipartikel. At partiklerne alle har en antipartikel-partner er strengt taget også et resultat fra relativitetsteorien (omend der gik mere end 30 år før man indså det).

Øvelse 3: Myonens levetid

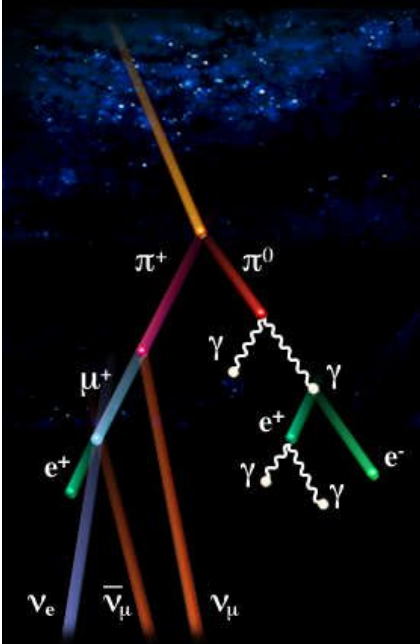
Det er en almindelig opfattelse at rigtigheden af relativitetsteorien nødvendigvis er vanskelig at eftervise eksperimentelt. Det er den faktisk ikke. Et lille eksperiment (og, det må indrømmes, en



tillid til et par udsagn om levetid og sammensætning af den kosmiske stråling) kan let eftervise at Einstein havde ret i ihvertfald to ting: Et ur i bevægelse går langsomt og dets udstrækning formindskes.

En myon er en tung udgave af en elektron – den har samme ladning, men vejer ca. 130 gange mere og den er derfor radiaktivt ustabil, dvs. den henfalder til en elektron (og nogle flere, i denne forbindelse irrelevante, partikler kaldet neutrinoer, ν). Dens levetid i hvile er 2.2 mikrosekunder (μs). Denne slags partikler bliver dannet i relativt store højder i Jordens atmosfære, omkring 10 km oppe. De bliver dannet med så høj energi at de bevæger sig med en fart meget nær lysets, dvs. ca.

300.000 km/s eller 0.3 km/ μs . Hvis deres levetid *i bevægelse* var identisk med deres levetid *i hvile* ville de således nå knapt en kilometer fra produktionsstedet, dvs. de ville aldrig nå frem til en tæller placeret ved jordoverfladen. Med en almindelig Geiger-tæller kan man høre kliklyde forårsaget af ladede partikler, dels fra omgivelsernes radioaktivitet, dels fra den kosmiske stråling. Cirka 25% af disse klik stammer fra kosmisk stråling, hovedsageligt fra myoner der løber gennem tælleren. Alternativt kan man afbilde myonens spor i et gnistkammer som vist på figuren. Hvordan kan det lade sig gøre at observere myoner når de er produceret i en højde af 10 km (se figuren)? Det kan det fordi myonen bliver relativistisk, dvs. dens bevægelsesenergi, E_{kin} , overstiger 'hvilemassens energi' beregnet ud fra $E=mc^2$. Når det sker, forøges dens levetid med ca. samme faktor som E_{kin}/mc^2 fordi den bevæger sig i forhold til os. Den kan altså kun sige klik i vores tæller hvis det er rigtigt at et ur i bevægelse går langsomt. Nå, siger skeptikeren, hvad så hvis jeg rider på ryggen af myonen? Så ligger den jo stille i forhold til mig og må derfor have sin normale levetid på 2.2 μs Ja, det er helt rigtigt og forklaringen er den, at ikke bare ændrer tidens gang sig for ting i bevægelse, rummets udstrækning ændres også. Således synes afstanden til Jorden for myonen at være forkortet med samme faktor som tiden før blev forlænget med og den kan igen nå ned til jordoverfladen. I den ekstreme grænse hvor bevægelsen foregår med lysets fart, som den naturligvis gør for fotoner (lyspartikler), er afstanden set for fotonen således nul (!) og man kan sige at vi – igen set fra fotonens synspunkt – henter fotonen fra Solens overflade med øjet når vi kigger derop.



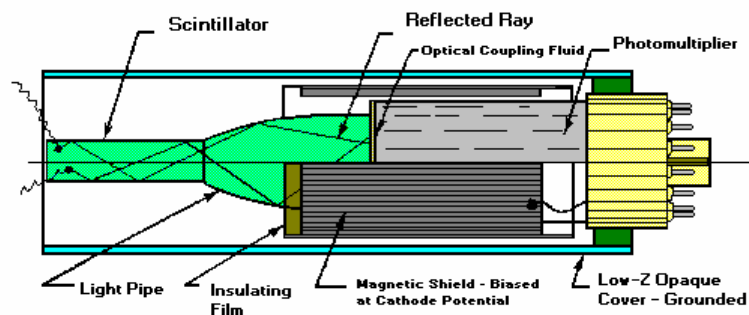
De oprindelige partikler i den kosmiske stråling, som kan være protoner, fotoner eller store atomkerner, kan stamme fra Solen, Mælkevejen, vores egen galaksehob eller sågar fra endnu fjernere egne af Universet. Når en sådan energirig partikel rammer et atom i den øverste del af Jordens atmosfære 'smadres' atomet og dets kerne i mange dele. De derved dannede partikler, som ligeledes er energirige, kan ramme atomer længere nede i atmosfæren og denne lavine-proces kan fortsætte indtil

jordoverfladen er nået. Ved at måle antallet i og udstrækningen af partikelbygen kan man feks. udlede hvad energien af den oprindelige partikel var.

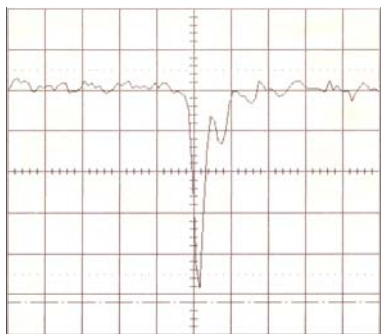
Denne kosmiske stråling blev opdaget i begyndelsen af de tyvende århundrede og udgør som nævnt ca. 25 % af den naturlige baggrundsstråling. I en kosmisk byge (se figuren) kan indgå adskillige usædvanlige partikler som feks. myoner (μ^+ , μ^-), pioner (π^+ , π^- , π^0) og positroner (e^+). Opdagelsen af den første antipartikel, positronen, i 1932 var i den kosmiske stråling.

Denne øvelse er baseret på brugen af et såkaldt scintillerende materiale, en scintillator. Der findes mange forskellige typer scintillerende materialer, organiske forbindelser (feks. polystyren) såvel som

uorganiske (natriumiodid, NaI – gammataælleren i kernereaktionsøvelsen) og både flydende og faste ved almindeligt tryk og temperatur. Fælles for dem alle er at de afgiver lys ved passagen af en ladet partikel, kort sagt fordi den passerende ladning eksiterer atomer i stoffet der efter kort tid henfalder under udsendelse af lys. Dette lys transporteres videre i en lysleder. Idet lysmængden er relativt lille (typisk ca. 20.000 fotoner pr. cm) skal den forstærkes kraftigt hvilket finder sted i en fotomultiplikator (Photo-Multiplier-Tube, PMT). I fotomultiplikatoren benyttes den foto-elektriske effekt til at lade lys udsende elektroner. Disse elektroner accelereres gennem et spændingsfald og rammer derefter en plade hvor hver elektron afgiver mindst to sekundære elektroner. Denne proces fortsættes gennem ca. 10-12 trin hvorefter de få elektroner har udviklet sig til en elektron-lavine der kan detekteres som en elektrisk puls. Fordelingen af spændingsfald mellem de mange plader styres af den såkaldte base. Generelt kalder man hele sammensætningen af scintillator, lysleder, foto-



multiplikator og base for en scintillator-tæller. En typisk puls fra en scintillator-tæller er vist i

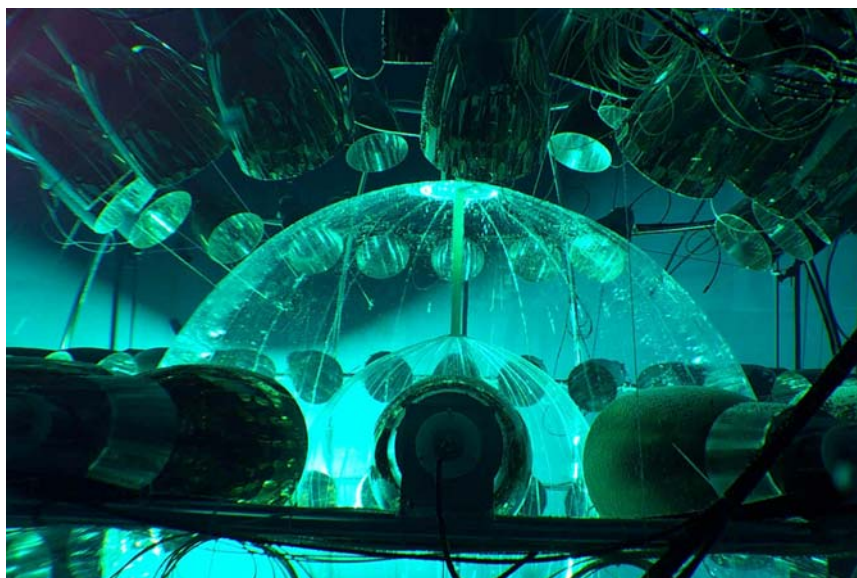


figuren her (tidsinddeling 10 ns). Det ses at den første flanke (rise-time) er meget stejl, typisk få nanosekunder (ns). Med forskellige tricks kan det lade sig gøre at få tidsopløsning af gennemtrængende partikler ned på ca. 0.1 ns, hvilket ikke er nødvendigt her. Idet foto-multiplikatoren selvsagt er meget lysfølsom må der ikke slippe lys ind fra omgivelserne. Derfor

pakkes scintillator og lysleder ind i reflekterende folie og dernæst i mørk plast og tape der forbindes tæt ved overgangen til foto-multiplikatoren.

Første del af øvelsen går ud på at samle en funktionsdygtig scintillator-tæller fra dens bestanddele. Har man først gjort det en gang, ved man at man kan gøre det igen (og at der ikke er ret meget der kan gå i stykker).

Inden der sættes (negativ) højspænding til tælleren bør den dækkes med et sort klæde for at afskærme evt. huller der kan give 'falsk' lys.

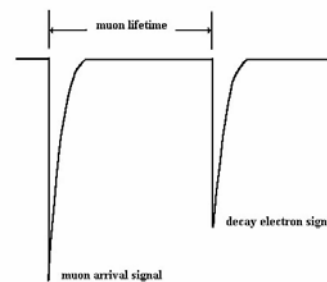


En typisk PMT kan tåle -2 kV og begynder multiplikation allerede ved -1.6 kV. En god tommelfingerregel er at forstærkningen fordobles for hver 40 Volt spændingen øges.

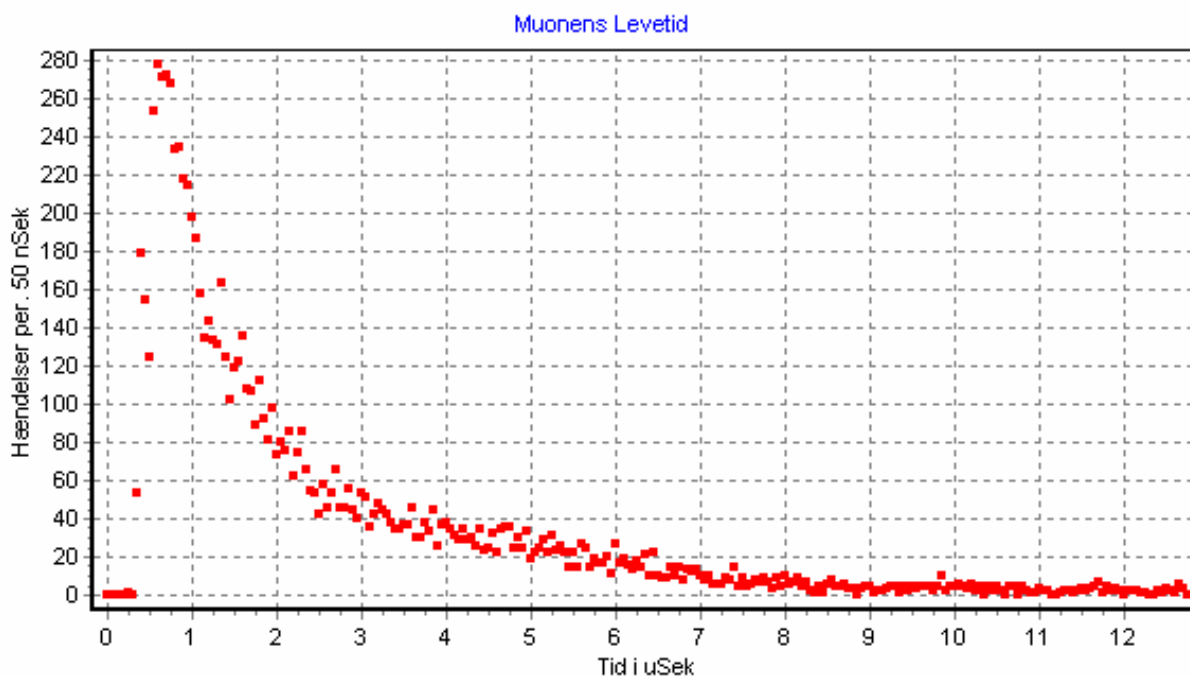
Forbind udgangen af basen til et oscilloskop der sættes til at trigge på den negative flanke (baserne giver meget tit et negativt signal, her alle, men det gælder ikke generelt) med 20 mV skala, tidskonstant 20 ns og trigger normal.

Udover forbindelsen til højspænding (HV) har de fleste baser en indgang der benævnes -800 V. Denne indgang benyttes som ekstra forsyning ved høje tællerater, dvs. ca. 1 mio. pr. sekund eller så. Idet vi forventer i størrelsesordenen 1 pr. sekund er der ingen grund til at benytte -800 V.

Anden del af øvelsen går ud på at måle myonens levetid i hvile. Til dette benyttes en tyk scintillator med et relativt stort areal. Idet myonen løsriver eller eksiterer elektroner langs sin bane i scintillatoren hvorunder der udsendes lys, vil den tabe energi. I nogle tilfælde taber den så meget energi at den standses i scintillatoren.

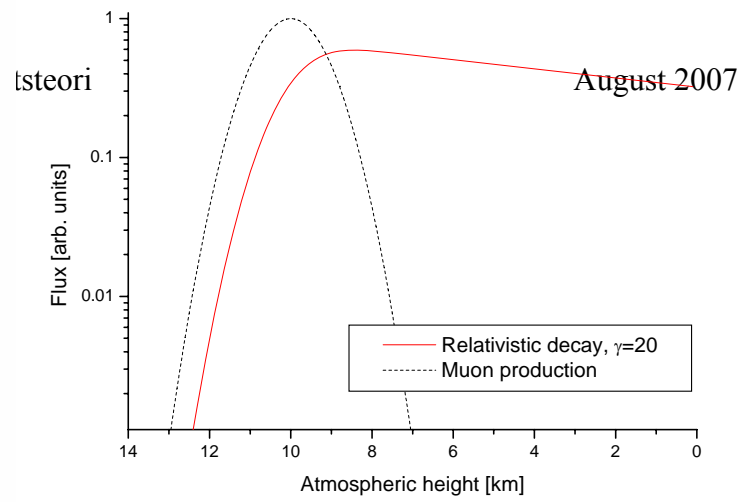
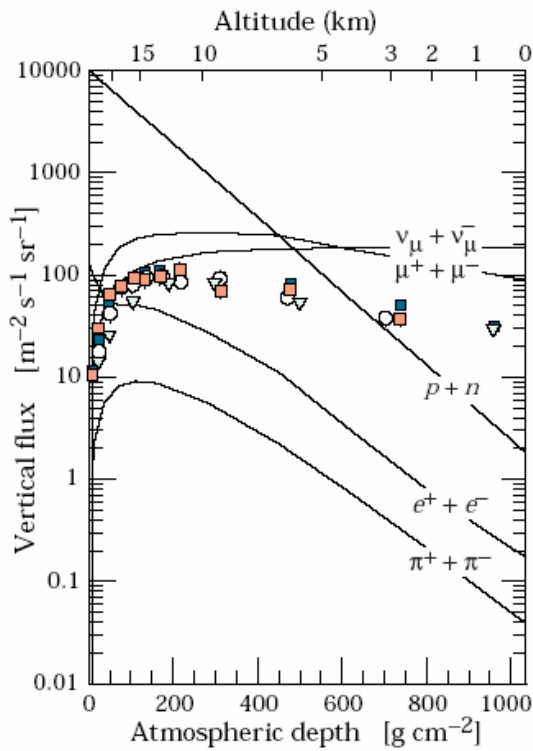


Der vil derfor komme to pulser tæt forfulgt af hinanden: Den første i det øjeblik myonen gennemtrænger scintillatoren og bringes til standsning og den anden når myonen henfalder til en elektron der også giver anledning til lysudsendelse i scintillatoren. Disse to pulser vil være separeret med den pågældende myons levetid i hvile.



Et typisk måleresultat (taget over 4 dage) ser ud som vist i figuren herover.

Myonen har selvsagt 'forbrugt' af sin levetid når den rammer scintillatoren, men det vigtige er *formen* af henfaldskurven – at påbegynde målingen senere svarer simpelthen til blot at have et mindre antal myoner at tælle henfaldet af.



Det sidste trin i overbevisningen er et kvalitativt argument for at myonerne faktisk produceres i 10 km højde. I figuren herover til venstre er vist det observerede antal partikler (pr. areal, tid og retning),

bla. myoner ($\mu^+ + \mu^-$), som funktion af den atmosfæriske dybde, omsat på den øverste skala til højde.

Læg mærke til den logaritmiske y-skala.

Som et kvalificeret gæt kan vi antage, at myonerne produceres normalfordelt omkring højden 10 km, med en varians på 0.8 km (den prikkede kurve i figuren herover, til højre). Endvidere antager vi for at lette beregningen at de alle produceres med en Lorentz faktor på $\gamma=20$ og at de henfalder i overensstemmelse med tidsforlængelsen baseret på denne værdi af γ . Resultatet er vist i figuren som den røde, fuldt optrukne linie, og en sammenligning med forrige figur peger kraftigt i retning af, at fortolkningen med de ca. 10 km er korrekt.

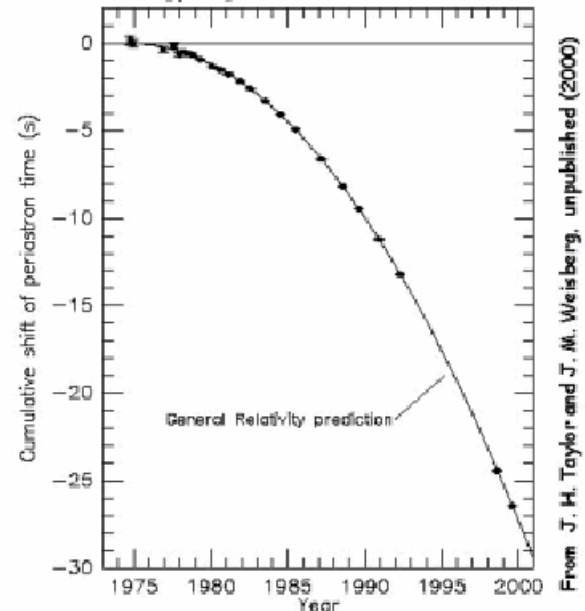
Øvelse 4: Et Michelson-Morley eksperiment

I 1993 delte Joseph Taylor og Russel Hulse Nobelprisen for at påvise eksistensen af gravitationelle bølger, først postuleret som en følge af Einsteins generelle relativitetsteori i 1916. De målte at omløbsfrekvensen i en såkaldt binær pulsar (to neutronstjerner der kredser om hinanden) tiltog i takt med at der blev udstrålet energi i form af gravitationelle bølger. Dette er dog en indirekte metode og der søges i skrivende stund efter gravitationelle bølger med laser-interferometre der principielt bare er stor-skala udgaver af Michelson-Morley interferometret.

Denne øvelse går ud på at stifte bekendtskab med Michelson-Morley interferometret, dets store følsomhed for ændringer i afstande og andre



Comparison between observations of the binary pulsar PSR1913+16, and the prediction of general relativity based on loss of orbital energy via gravitational waves



forhold samt interferens i almindelighed. Af relevante sammenhænge (udover til målinger som den vi selv skal udføre) kan henvises til f.eks. LIGO-interferometret der med to lange laser-stråler opstillet i et Michelson interferometer design forsøger at detektere ekstremt små ændringer i afstande (mindre end en proton-diameter!) forårsaget af tyngdebølger.

For at få et indtryk af interferometres store følsomhed foretager vi en måling af luftets brydningsindeks, n . Tabelværdien for denne størrelse er 1.000292 (ved 589.3 nm, 101325 Pa og 20° C) og det viser sig at vi relativt let kan måle en størrelse til mindst 5 betydende cifre vha. et Michelson interferometer!

Den totale optiske vejforskel i Michelson interferometret er: $S+2nl = p\lambda$ hvor l er længden af gascellen, λ er bølgelængden af det udsendte lys (632.8 nm for en He-Ne laser), p er et helt tal og $S = \sum 2n_i l_i$, dvs. en sum over alle de forskellige materialer der indgår i opstillingen (luft, glas etc.)

som ikke ændres når der slippes luft ind i gascellen. Denne sum indeholder strengt taget også negative led idet der er tale om en vejlængdeforskel, men det vigtige her er at den er konstant. Når røret er tomt er n pr. definition 1, dvs. $S+2l = (p-N)\lambda$ hvor N er antallet af interferensstriber der flyttes når man sammenligner situationen med og uden luft i gascellen. Trækkes $S+2l = (p-N)\lambda$ fra $S+2nl = p\lambda$ fås $2(n-1)l = N\lambda$ hvorfra lufts brydningsindex kan bestemmes ud fra laserens bølgelængde ved at tælle N og måle l .

På laserbordet fastgøres laser og to spejle således at en opstilling lignende figuren herunder

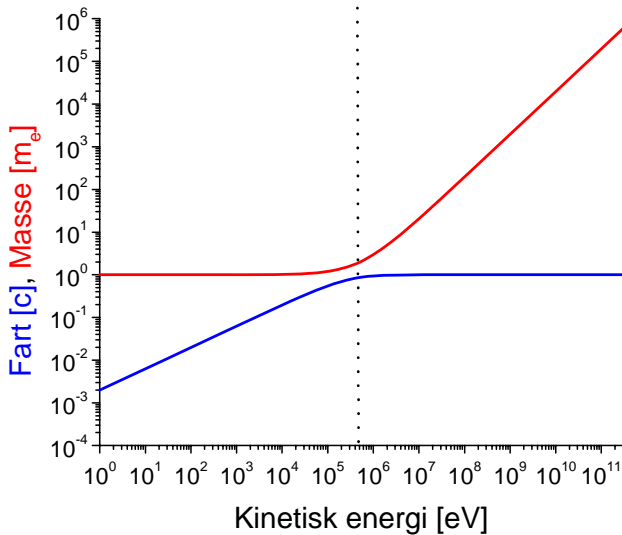


fremkommer. Her er L laseren, G gascellen og M det kommercielle Michelson interferometer. Vær opmærksom på at udligne højdeforskelle. Indstil spejle osv. Indtil

der opnås interferens. Indsæt derefter en lille linse til at forstørre interferensstriberne. Pump gascellen 'tom' for luft. Mens interferensmønstret observeres slippes der nu langsomt luft ind hvorunder der tælles hvor mange interferensstriber, N , der 'vandrer' henover skærmen. Luftens brydningsindeks kan nu findes fra ovennævnte formel. Benyt lejligheden til at få et indtryk af interferometrets store følsomhed for vibrationer, afstande etc., feks. ved at banke let på bordet eller dreje på mikrometer-skruen (kan I bestemme udvekslingsforholdet i denne skrue?).

Øvelse 5: Elektronens relativistiske masse

På Århus Universitet råder vi over eksperimentelt udstyr som selv veludstyrede amerikanske

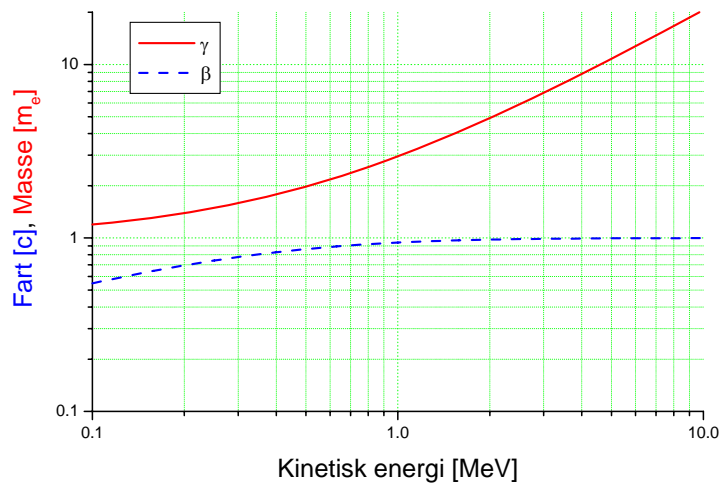


laboratorier kan blive misundelige over. Vi har således adgang til ca. 10 accelerators af forskellige typer og med varierende energier. Feks. findes der i kælderens en såkaldt '5 MeV', der kan accelerere partikler til en energi i området op mod 5 MeV, bla. til implantation i faste stoffer og såkaldt 'proton-induceret røntgen stråling' (PIXE) og andre typer undersøgelser. 5 MeV acceleratoren kan også benyttes til at undersøge den relativistiske masseforøgelse.

Som det ses af figuren (læg mærke til de logaritmiske skalaer) bliver farten for en

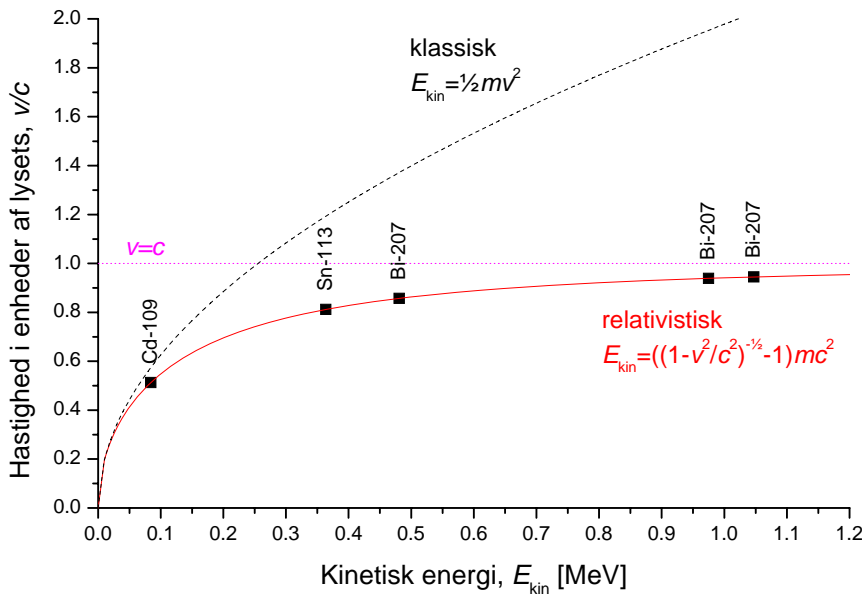
elektron næsten lig med lysets fart når dens kinetiske energi bliver sammenlignelig med dens hvilemasse gange c kvadreret (vist med en lodret stiplede linie). Samtidig bliver dens masse markant større end dens hvilemasse, m_0 .

Af disse grunde opdeles der traditionelt i to områder, det urelativistiske og det relativistiske, henholdsvis under og over kinetiske energier svarende til hvilemassen. Der er principielt ikke noget der er urelativistisk (selv eV elektroner kan påvises at have relativistiske korrektioner), men det er standard 'slang'. I



figuren er vist et zoom på det område der er interessant i forbindelse med denne øvelse. Heraf ses igen at den i laboratoriet målte masse, dvs. γm_0 , tiltager med omkring en faktor 10 når energien øges fra det urelativistiske område til nogle få MeV. Der er imidlertid en del tekniske komplikationer der gør 5 MeV maskinen uegnet til øvelser. Denne øvelse er derfor baseret på radioaktive kilder, ²⁰⁷Bi

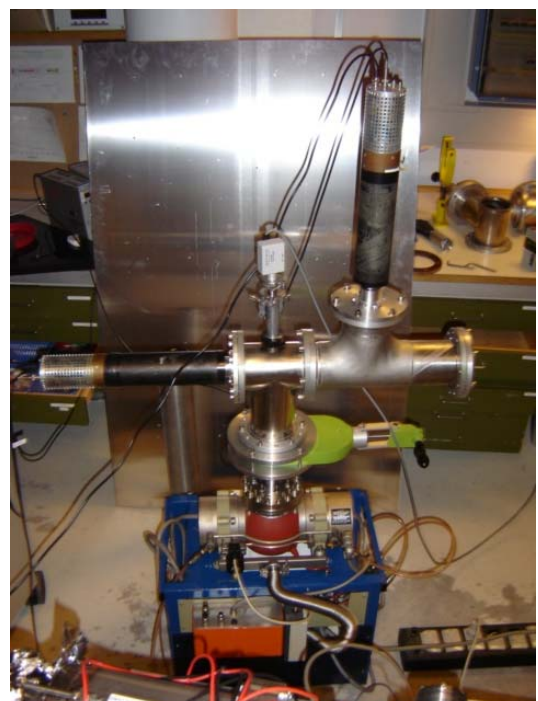
og ^{133}Ba der udsender såkaldte konversions-elektroner (kernens gamma-henfald 'skyder en elektron ud') med forskellige energier op til 1 MeV.



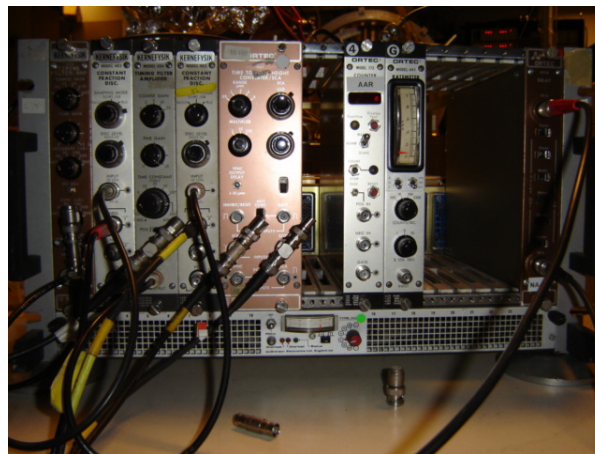
Vi vil her forsøge at eftervise elektronens masseforøgelse ved at indse, at farten går asymptotisk mod c uanset hvor meget energi partiklen besidder, Da højere energi enten betyder højere fart eller højere masse, må energien gå til masseforøgelse hvis ikke

farten ændrer sig. Farten findes ved at måle flyvetiden over en kendt afstand. Denne teknik er standard og kaldes Time-Of-Flight (TOF) metoden. I figuren er vist de forventede resultater fra en simulering for forskellige radioaktive kilder og det ses at der er en markant forskel mellem det klassiske udtryk for farten (i enheder af c) som funktion af energien og det relativistiske.

Time-Of-Flight metoden beror på en nøjagtig måling af elektronens passage af to detektorer – i dette tilfælde scintillatorer S1 og S2 (se øvelse 3 og de sorte rør på billedet). Den første er meget tynd, ca. 10 mikrometer, for at påvirke elektronens energi minimalt, mens den næste er 2 mm tyk og stopper elektronen helt. Først måles flyvetiden for S2 så tæt som muligt på S1 og kilden. Den hermed målte tid inkluderer kabellængder (ca. 1 ns per 20 cm), forsinkelser af signaler i forstærkerne etc. og selvfølgelig elektronens sande flyvetid. Man indsætter dernæst et rør af kendt længde (mål denne) mellem S1 og S2 og ser hvor meget flyvetiden forøges, hvorfra man kan finde farten idet alle andre størrelser end elektronens sande flyvetid er



konstante og 'går ud'. Idet lysets fart er 30 cm/ns og en relativistisk elektron har en fart der er sammenlignelig hermed, fremgår det at selv med en afstand på 3 m opnår man kun flyvetider på godt 10 ns. Passagen af hver detektor skal derfor måles med stor præcision, helst mindre end 1 ns. Dette kan lade sig gøre med en scintillator, en 'timing filter amplifier' (der forstærker og integrerer/differentierer signalet) og en 'constant fraction discriminator', der uanset pulsdybden vil trigge på samme tid af et givet signal. Med omhyggelig opsætning kan unøjagtigheden bringes ned på 0.3-0.4 ns og præcisionen er dermed omkring 10 cm. Dette gør bla. scintillatoren til et meget benyttet instrument i højenergifysik idet den er robust, pålidelig, billig og temmelig præcis.



Beregn flyvetiden for de forskellige energier givet i tabellen nedenfor og plot resultatet med fart som funktion af energi. Nogle af toppene vil være umulige at skelne fra hinanden – selv med en

Kilde	Energi [keV]	Relativ hyppighed [%]
^{133}Ba	25.5	13.9
^{133}Ba	43.63	3.97
^{133}Ba	45.01	44
^{133}Ba	47.45	1.9
^{133}Ba	75.28	7.4
^{133}Ba	79.78	1.51
^{133}Ba	240.42	0.34
^{133}Ba	266.87	0.68
^{133}Ba	320.03	1.31
^{207}Bi	481	2
^{207}Bi	975	7
^{207}Bi	1047	2

tidsopløsning på 0.3 ns (hvilke?) og nogle er så svage at de ikke kan identificeres. **Vigtigt:** Scintillatorerne skal køre med en spænding på ca. -2.1 kV og tåler ikke lys med spænding på. Derfor: Når I åbner opstillingen, feks. for at sætte et rør i, skal spændingen være NUL.

I selve øvelsen benyttes kun Bi-kilden der giver relativistiske elektroner på omkring 1 MeV.

Mål flyvetiden og bestem hermed hastigheden. Tidskalibrering af spektret foretages ved at starte og stoppe med signalet fra den samme scintillator, med 'stop' forsinket gennem 'delay-boksen'. Ved at indsætte forskellige forsinkelser (feks. i enheder a 4 ns) opnås toppe der kan benyttes til at finde konverteringen fra kanal-nummer til tid i ns. Når det lange rør indsættes vil elektronernes

flyvetidsfordeling flytte, svarende til den ekstra flyvetid. Da tælleraten er temmelig lav når stop-detektoren er langt væk, opnås typisk 50 tællinger pr. kvarter med det lange rør i. Det er derfor en fordel at vide, at usikkerheden på centroiden af en normalfordeling (som flyvetidsfordelingen ligner) er variansen σ delt med kvadratroden af det totale antal tællinger. Variansen findes ved at bestemme 'full-width-half-maximum' (FWHM), dvs. bredden af toppen der hvor den har halvdelen af sin maksimale højde og derefter benytte: $\sigma = \text{FWHM}/(2 \cdot (2\ln(2))^{1/2})$.

Plot hastigheden i en figur á la den tredje figur til denne øvelse. Bestem usikkerhederne i målingen og konkluder hvorvidt det klassiske udtryk $E = \frac{1}{2}mv^2$ kan beskrive resultatet og tilsvarende for det relativistiske udtryk (som I selv bør kunne udlede hvis jeres øvelse ligger sent i kurset).

Hvis målingen er en ægte normalfordeling, er sandsynligheden for at få noget der ligger mere end 1σ fra den 'rigtige' værdi (den værdi man ville opnå med uendelig lang tælle tid) 31.7%, mere end 2σ fra den 'rigtige' værdi 4.6% og så videre, se tabellen.

Afstand	Sandsynlighed [%]
1σ	31.7
2σ	4.6
3σ	0.27
4σ	$6.3 \cdot 10^{-3}$
5σ	$5.7 \cdot 10^{-5}$
6σ	$2.0 \cdot 10^{-7}$

Øvelse 6: GPS systemet

Global Positioning System, eller GPS i daglig tale, er et satellitbaseret system oprindeligt udviklet af det amerikanske militær til nøjagtig tids- og positions-bestemmelse. Systemet er baseret på samtidig kommunikation med mindst 4 satellitter hvorved man kan løse ligningssystemet

$$c^2(t - t_i)^2 = |\vec{r} - \vec{r}_i|^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (A)$$

Hvor \vec{r}_i er positionen af satellit i , t_i er udsendelsestidspunktet fra satellitten og (\vec{r}, t) er modtagerens position og tid. Det bemærkes, at ifølge det basale postulat i relativitetsteorien – at lysets hastighed er uafhængig af observatør og kildes indbyrdes hastighed – er der ikke noget indeks på c – den er mao. konstant. Da lyset bevæger sig med knapt 30 cm pr. nanosekund (ns), vil en

tidlig opløsning på 1 ns svare til en positionsopløsning på 30 cm.

Der er flere relativistiske effekter i GPS systemet der bidrager betydeligt mere end 1 ns, og hvis de blev negligeret, ville der ophobes en daglig fejl på 11 km!

De betydelige relativistiske effekter er: tyngdens indvirkning på ures gang, hastighedens indvirkning på ures gang og den såkaldte 'Sagnac effekt', der alle tre gennemgås meget kort i det følgende. En grundigere gennemgang får I i løbet af den teoretiske del af kurset.



Tyngdens indvirkning på ures gang



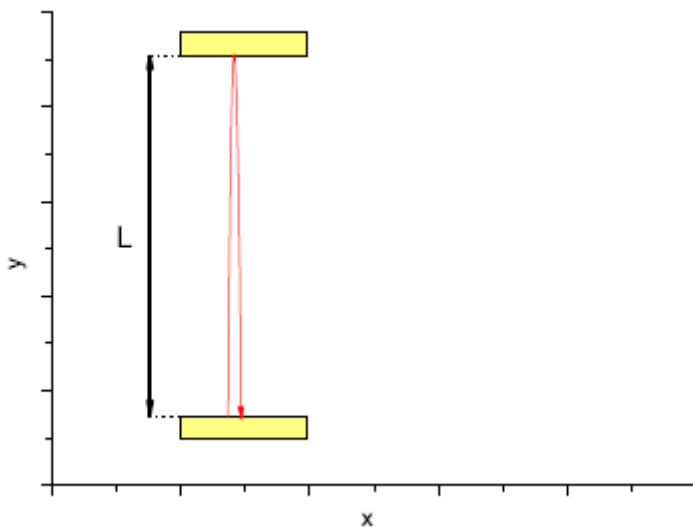
I dette afsnit holder jeg mig til en lettere upræcis gennemgang (dvs. matematisk set ikke stringent, men fysisk set korrekt), der alligevel får den rigtige pointe frem. Som man kan se af frimærket, er Bohr's kvantepostulat $h\nu = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ blevet folkeeje. Så der er en lineær sammenhæng mellem energi og frekvens, som er $1/\text{tid}$. Fra $E = mc^2$ ved vi også, at energi er en form for masse og i et

homogent tyngdefelt er den potentielle energi af en masse givet fra $E = mgh$, hvor h er højden. Kobler man disse tre elementer sammen kan man forvente at frekvensen (altså den inverse tid) tiltager når højden øges: $\Delta h\nu/E = g\Delta h/c^2$. Udfører man regningerne korrekt får man en relativ korrektion på $\Delta t/t = \Delta\Phi/c^2$ hvor $\Phi(r) = -GM/r$ er tyngdepotentialet. I grænsen $\Delta h \ll r$ giver det svaret ovenfor. Sagt på en lidt anden (og mere upræcis) måde: *Et ur i en tyngdebrønd går langsomt* (set udefra).

For GPS satellitterne er højden $h = 25.000$ km over jordoverfladen og Jordens radius er $r = 6.378$ km, dvs. $\Delta\Phi = \Phi(r) - \Phi(r+h) = -GM/r + GM/(r+h)$ så $\Delta t/t = \Delta\Phi/c^2 = -6.95 \cdot 10^{-10} + 1.41 \cdot 10^{-10} = -5.5 \cdot 10^{-10}$. Det er en lille korrektion, men betydelig, se nedenfor.

Hastighedens indvirkning på ures gang

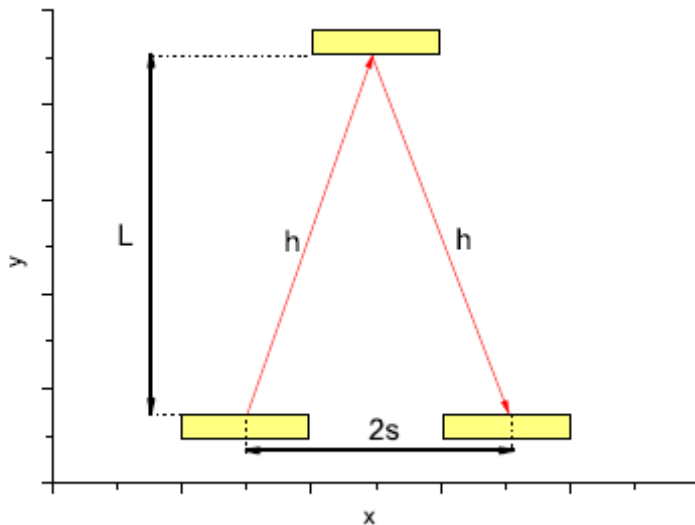
Her vil jeg blot minde om at lysets hastighed c *altid* er den samme, uanset hvor hurtigt kilden bevæger sig, og uanset hvor hurtigt observatøren bevæger sig.



I lysuret i hvile, se figuren, er perioden den tid, det tager lyset at bevæge sig fra det ene spejl, hen til det andet og tilbage igen. Hvis afstanden mellem spejlene er givet som L , får man altså perioden

$$T_0 = \frac{2L}{c} \quad (1)$$

hvor indekset 0 viser (her og i det følgende), at der er tale om et instrument (ur eller målestok f.eks.) i hvile i forhold til observatøren. Der gælder også, at $L=L_0$ på tværs af en evt. bevægelsesretning af uret (ellers bryder Pythagoras' sætning sammen i planen vinkelret på bevægelsesretningen).



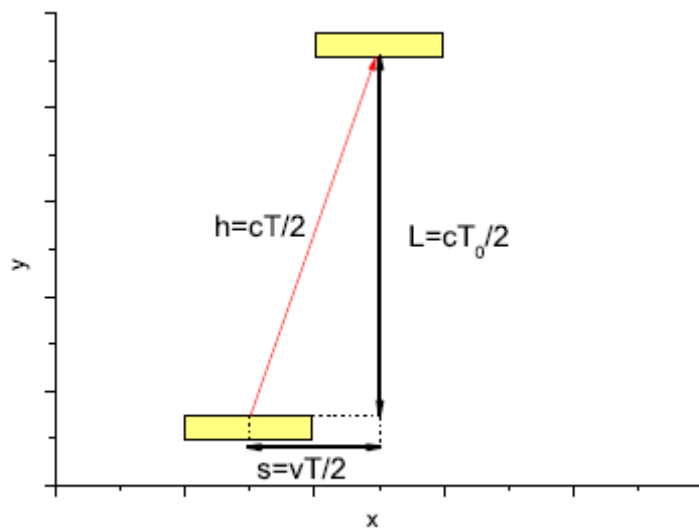
Nu sættes lysuret i bevægelse med hastigheden v langs x -aksen, se figuren, og afstanden mellem det punkt, hvor lyset udsendes til det punkt, hvor det når tilbage til spejlet er

$$2s = v \cdot T \quad (2)$$

hvor perioden T er perioden målt med uret i bevægelse (det er jo det, der definerer, at pulsen er nået tilbage). Afstanden tilbagelagt af lyset langs de skrå hypotenuuser, begge kaldet h , er

$$2h = c \cdot T \quad (3)$$

Her er det vigtigt, at lysets hastighed altid er den samme, så c i ligning (1) og i ligning (3) er den samme. Der vil nu være en retvinklet trekant med kateterne $vT/2$ (fra ligning (2)) og $cT/2$ (fra ligning (1)) og hypotenusen $cT/2$ (fra ligning (3)), se figuren.



Af Pythagoras' sætning $s^2 + L^2 = h^2$ har man således

$$\left(\frac{vT}{2}\right)^2 + \left(\frac{cT_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{cT}{2}\right)^2 \quad (4)$$

hvor kvadraterne kan udføres, og der ganges på begge sider med 4

$$v^2T^2 + c^2T_0^2 = c^2T^2 \quad (5)$$

hvorefter vi samler led med hhv. T og T_0 ved at trække v^2T^2 fra på begge sider

$$c^2T_0^2 = c^2T^2 - v^2T^2 \quad (6)$$

Nu kan vi dele begge sider med c^2

$$T_0^2 = T^2 - \frac{v^2}{c^2}T^2 \quad (7)$$

sætte uden for parentes på højresiden

$$T_0^2 = T^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (8)$$

dele med udtrykket i parentesen på begge sider og bytte højre- og venstresiden om

$$T^2 = T_0^2 \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (9)$$

og til sidst tage kvadratroden på begge sider

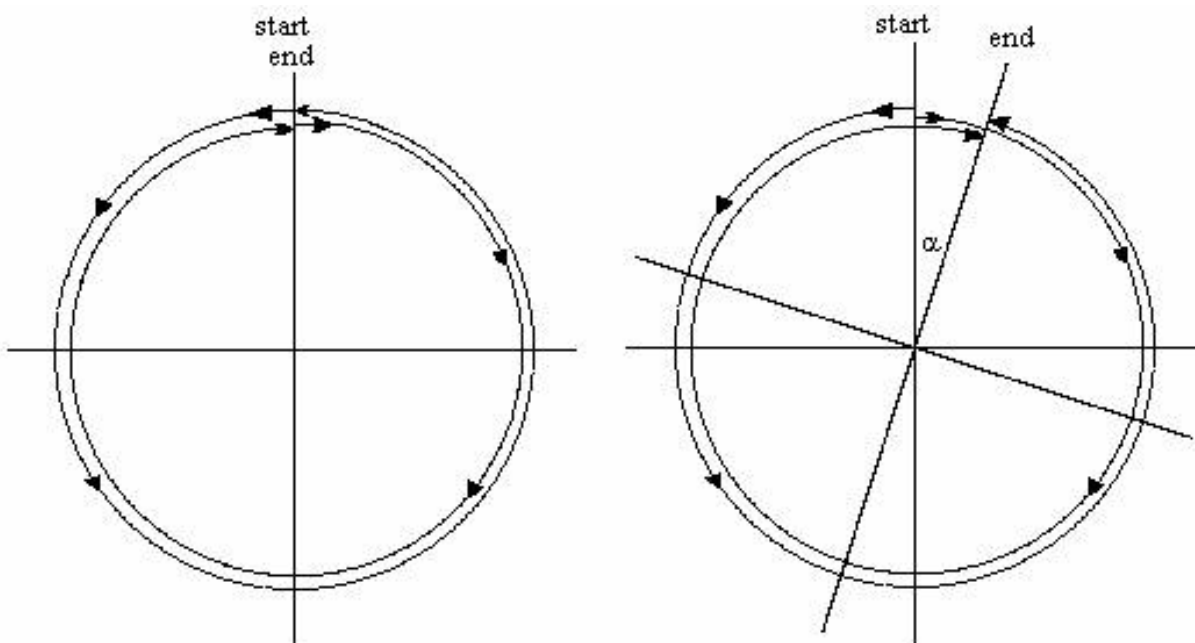
$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10)$$

Ligning (10) er det ønskede resultat - sammenhængen mellem perioden på et ur i hvile T_0 og et ur i bevægelse T . Perioden af uret i bevægelse er altså meget større end perioden af uret i hvile eller med andre ord: *Et ur i bevægelse går langsomt!*

For GPS satellitterne er højden $h = 25.000$ km over jordoverfladen, Jordens radius er $r = 6.378$ km og de tager 12 timer om et omløb, så $v = 2\pi \cdot 31378 \text{ km} / (12 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}) = 4.56 \text{ km/s}$. Det er hurtigt, men stadig meget mindre end c , så ligning (10) kan rækkeudvikles til at give korrektionen $T/T_0 \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} = 1.16 \cdot 10^{-10}$, dvs. satellittens ur taber $10 \mu\text{s}$ i døgnet. Det er ikke meget, men lysets hastighed er meget høj, $300 \text{ m}/\mu\text{s}$ så den tilsvarende positions-unøjagtighed er 3 km pr. døgn! Læg her også mærke til, at korrektionen fra tyngden er næsten 5 gange større og har modsat fortegn. Den totale korrektion svarer således til 11 km pr. døgn. Med andre ord: Glemmer man relativitetsteorien, kommer taxa'en ikke frem til bestemmelsesstedet!

'Sagnac effekt'

Den sidste effekt der her skal nævnes som bidrag til GPS-systemets præcision, er den såkaldte 'Sagnac-effekt'. Sagnac-effekten skyldes Jordens rotation. I figuren til venstre er vist to



lyspulser der sendes hver sin vej rundt på en stationær cirkel med radius R . Idet der ikke er forskel på at sende pulsen den ene eller den anden vej – de skal tilbagelægge samme afstand med samme fart, må de ankomme til endepunktet samtidigt.

Nu betragter vi så tilfældet til højre, hvor cirklen roterer. I det tidsrum t det tager pulsen der løber mod uret at nå tilbage til udgangspunktet, har cirklen roteret vinklen α , med vinkelhastigheden ω , dvs. $\alpha = \omega t$. Startpunktet bevæger sig med hastigheden $v = \omega R$, så tidsrummet t må være givet ved

$$t_- = \frac{2\pi R}{c + v}$$

Og tilsvarende må det tidsrum det tager pulsen der bevæger sig med uret at nå tilbage til udgangspunktet være

$$t_+ = \frac{2\pi R}{c - v}$$

Så tidsforskellen bliver

$$\Delta t = t_+ - t_- = 2\pi R \left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v} \right) = \frac{4\pi R v}{c^2 - v^2} = \frac{4A\omega}{c^2 - v^2} \cong \frac{4A\omega}{c^2}$$

hvor A er arealet af cirklen $A = \pi R^2$ og den sidste tilnærmelse gælder når $v \ll c$ som for eksempel for jordoverfladen. Dette resultat gælder såvel klassisk som relativistisk og for en hvilken som helst form for lukket kurve, ikke kun for en cirkel. Den fejl man begår med et ur hvis man glemmer at Jorden roterer er $\Delta t/2$, hvor $2\omega/c^2 = 1.6227 \cdot 10^{-21} \text{ s m}^{-2}$ og radius ved ækvator er $r = 6.378.137 \text{ m}$ så $A = 1.278 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, hvilket giver $\Delta t/2 = 207.4 \text{ ns}$, en ikke ubetydelig fejl.

I den første del af øvelsen, skal I teste præcisionen på en standard GPS-modtager, en Garmin Forerunner 305. I sammenligning med andre GPS'er har denne type flere fordele i forhold til øvelsen: Den kan forbindes til en PC, der vil vise rute, højde tilbagelagt, total distance, fart og den er samtidig robust, rimelig vandtæt og let at bære. Ifølge producentens specifikationer, er dens nøjagtighed ”< 10 meter 50% typisk”. Hvad det sidste ”50% typisk” betyder, er ikke helt klart, men den burde kunne vise positionen med en præcision på bedre end 10 meter under de fleste forhold. Den kan yderligere informere om hvilke af 12 GPS satellitter den på det pågældende tidspunkt kommunikerer med, samt den heraf beregnede nøjagtighed. Selve testen består i en gåtur i Universitetsparken (så lærer I også ’campus’ at kende) med 1) GPS-modtageren og 2) et præcist målehjul, der angiver den tilbagelagte distance i meter. Vurdér præcisionen af målehjulet ved bl.a. at anslå præcisionen på diameteren. GPS-modtageren er indstillet til at tage data hvert sekund.

Hvis man tager N normalfordelte, uafhængige målinger, kan det vises at præcisionen på middelværdien er givet som σ/\sqrt{N} , hvor det bedste gæt for σ i dette tilfælde er producentens 10 m. Så i princippet burde opløsningen på længdemålingen af en tur der varer 60 sekunder være $10\text{ m}/\sqrt{60}=1.3\text{ m}$, såfremt målingerne er uafhængige ('Store Tals Lov', mere herom i matematik, siger nemlig at for tilstrækkeligt mange målinger opnås normalfordeling, heraf navnet 'normal').

I den anden del af øvelsen, skal I forstå det basale princip i at finde positionen ud fra såkaldt 'trilateration': at man finder skæringspunktet mellem fire cirkler, centreret om fire forskellige kilder. Det er egentlig den geometriske fortolkning af ligning (A). Denne del udføres med en mikrofon og fire højttalere, samt en puls-generator, et oscilloskop og en forstærker. Bestem lyd hastigheden ved at sætte en højttaler tæt på mikrofonen, flyt den med en kendt afstand og observer på oscilloskopet hvor lang tid lyden tager om at bevæge sig den ekstra afstand. Sæt højttalerne op i veldefinerede positioner, og mikrofonen et tilfældigt sted imellem. Bestem – kun ved at lytte med mikrofonen til en højttaler ad gangen – mikrofonens position. Analogien mellem GPS-satellitterne og højttalerne, samt GPS-modtageren og mikrofonen fortæller dig nu hvordan GPS-systemet principielt virker.

I trilateration i en plan, begynder vi med tre sfærer og regner ud fra sfære 1's centrum:

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_2^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_3^2 = (x - i)^2 + (y - j)^2 + z^2$$

Vi trækker den anden fra den første og isolerer x :

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$$

som kan indsættes i den første til at give:

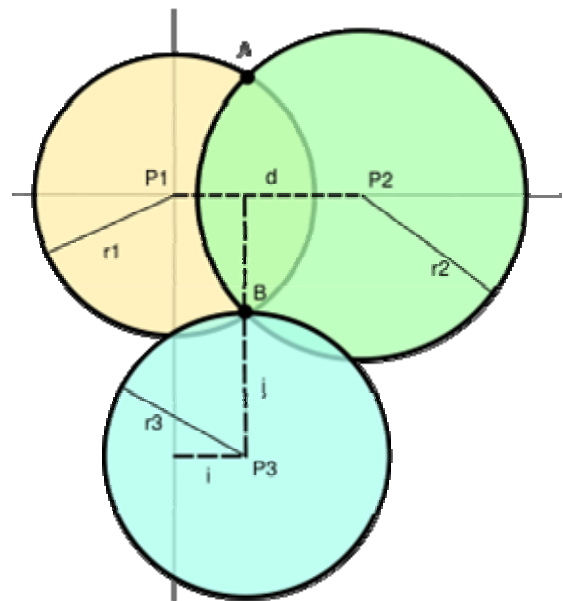
$$y^2 + z^2 = r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + d^2)^2}{4d^2}$$

der kan sættes lig med den tredje sfære:

$$y = \frac{r_1^2 - r_3^2 - x^2 + (x - i)^2 + j^2}{2j} = \frac{r_1^2 - r_3^2 + i^2 + j^2}{2j} - \frac{i}{j}x$$

hvorfra vi kan finde x og y koordinaterne. Den sidste koordinat, z , kan findes fra:

$$z = \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$$



og udvidelsen til 4 koordinater (\vec{r}, t) er principielt trivielt, men omfattende.

Kan man nøjes med 3 højttalere? Kan man også det i GPS-systemet hvis ens modtager har en meget præcis tidsopløsning? Hvad gør den fjerde satellit i GPS-systemet?

Anvendelserne af GPS-systemet er efterhånden så talrige, at det ville fylde flere sider blot at remse dem op. Her kan dog nævnes, at systemet bruges til f.eks. synkronisering af krydsfelter til højspænding for at lette fejlfinding, redningstjenester, i landbruget til præcis fordeling af gødning eller ukrudtsbekæmpende midler, til generel (f.eks. luftfartøjs) navigation og diverse basale fysik-eksperimenter hvor en præcis tidsstandard er ønskelig.

Som afsluttende bemærkning, er GPS systemer med præcision i millimeter-området under overvejelse. Her er der tale om relative ændringer på i størrelsesordenen $1 \text{ mm}/25.000 \text{ km} = 4 \cdot 10^{-11}$, eller omsat fra $\gamma - 1 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 = 4 \cdot 10^{-11}$ til $v = c\sqrt{1 - 1/\gamma^2} \approx c\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{-11}} \approx 2700 \text{ m/s}$.