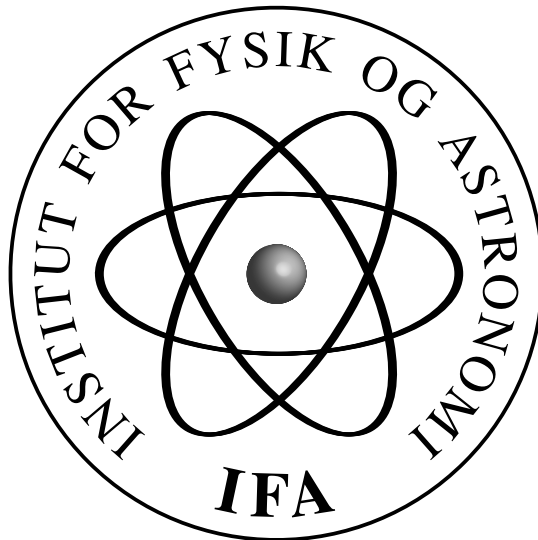


ABSORPTIONSTVÆRSNIT AF
SORTE HULLER



BACHELORPROJEKT I FYSIK
PEDER KLOKMOSE SØRENSEN – 20050808

VEJLEDER: DMITRI FEDOROV

30. JUNI 2008

INSTITUT FOR FYSIK OG ASTRONOMI
AARHUS UNIVERSITET

© Peder K. Sørensen 2008

Dette værk er trykt med Computer Modern 10pt
Layout og typografi af forfatteren ved hjælp af L^AT_EX
Alle figure er lavet med MatLab.

Indholdsfortegnelse

1	Indledning	1
2	Indledende manøvre	2
2.1	Beskrivelse af et sort hul: metrik og generel relativitetsteori	2
2.2	Det effektive potential	4
2.3	Tværsnit	5
3	Lys	7
4	Massive partikler	10
4.1	Effektiv potential	10
4.2	Udledning af tværsnittet	12
4.3	Diskussion af resultat samt sammenligning	13
5	Numerisk løsning	15
5.1	Ligninger samt start-/grænsebetingelser	15
5.2	Programgennemgang	17
6	Absorption af kvantebølger	20
7	Konklusion	24
A	Programmer	26
	Litteratur	28

Resumé

Black holes suck, big time, according to popular science that is. Well... that's a truth to be modified. In general, the gravitational attraction towards a black hole is no different to that of any other massive object with a similar mass, shrinking our Sun to a black hole would have no affect whatsoever on the orbit of our planet, or any other in our solar system (the light would disappear, but that is another story). The only drastic alteration from Newtonian theory comes if you venture to close to the event horizon, in this case a strong attraction will seek to pull you further in, only in this case is it possible to say that black holes suck more (i.e. have a greater gravitational attraction) than other massive objects. The reason is that the higher mass concentration makes it possible to get so much nearer that relativistic effects become important, if not to say dominant.

The effect of this extra attraction, which actually only comes as a correction to the centrifugal barrier term, is that it becomes possible to catch particles in an otherwise classically unbound orbit (parabola, hyperbola), and have them either orbit the black hole or fall into it, thus being absorbed. The method by which this is done in (theoretical) practice will be considered in this project. Different results will arise whether you analyze a ray of light or a massive particle, I will handle both. Furthermore a mixture of general relativity and quantum mechanics will be used in an attempt to describe absorption of a plane quantum wave incoming on a black hole.

Finally a little numeric simulation will make help visualize the orbits and hence get a better idea of what is happening. These will also be used to check the analytical results, making sure the calculations are at least self consistent.

Kapitel 1

Indledning

Sorte huller suger alt til sig hvad de kan komme i nærheden af... i hvert fald hvis man skal tro diverse science fiction-film gennem tiderne, men er det i grunden rigtigt? Hvis man i sit rumskib havde kurs direkte mod centrum af et sort hul vil man før eller siden ramme begivenhedshorisonten og blive del af hullet, på samme måde som man vil ramme en planet eller stjerne når man når overfladen. Hvis man derimod rammer lidt ved siden af centrum er sagen mere kompliceret.

Betragt først problemet med en planet samt med den Newtonske mekanik, det er stadig muligt at ramme planeten idet denne har en rumlig udstrækning, men antag nu at vi rammer så meget ved siden af at det ikke er et problem. Fra Newtons anden lov og gravitationsloven er det muligt at udlede at hvis en partikel er indkommende fra uendelig med en total positiv energi vil den aldrig kunne gå i kredsløb omkring planeten, men i stedet følge en hyperbelbane og blive sendt af sted mod uendelig igen, blot med en ændret retning. Sådant en situation er også mulig hvis planeten var et sort hul, og der ville ske nøjagtigt det samme hvis massen sort hul og planet var ens og banekurvens startposition og -hastighed ikke blev ændret. Dette kommer af at det gravitationelle felt fra et sfærisk symmetrisk legeme ikke afhænger af den radiale massefordeling.

Hvis kredsløbet derimod var sådan så man kommer meget tæt på begivenhedshorisonten (uden at man klassisk ville kunne ramme ind i den) sker der sjove ting, selvom partiklen startede i uendelig med en positiv energi (dvs. en endelig kinetisk energi) er det muligt at gå i kredsløb om det sorte hul eller blive opfanget i det, dette skyldes at den generelle relativitetsteori giver en lille korrektion til det Newtonske gravitationspotential der giver en stærk tiltrækning tæt på det sorte hul, denne korrektion vil blive udledt og følgerne af den undersøgt i større detalje i tre situationer: en indkommende lysstråle (det lettest tilgængelige tilfælde), massive partikler (generelt samt i urelativistisk og ultrarelativistisk grænse) samt en indkommende plan kvantemekanisk bølge der spredes på det potential det sorte hul laver. Der vil blive foretaget både analytiske og numeriske beregninger, væsentlige resultater kan regnes analytisk, mens f.eks. banekurver for lys og massive partikler skal regnes numerisk. Det er altid godt med nogle kurver til at fremme forståelsen.

Målet er udtryk for absorptionstværsnittet som funktion af starthastighed (eller energi hvis man er til den slags). Den præcise definition af dette begreb følger sidst i næste kapitel, men det er stærkt knyttet til en kritisk værdi af stødpå parameteren. Der vil i projektet blive gjort brug af et bredt område af fysikken, både den generelle relativitetsteori (der kommer til at bære det største læs), men også begreber fra klassisk mekanik samt i sidste kapitel en indvirkning fra kvantemekanikken. Dertil skal også bruges en del kodning som vil blive foretaget i Matlab.

Kapitel 2

Indledende manøvre

I dette kapitel introduceres de basale begreber der skal til for at komme i gang med problemstillingen samt definere denne nærmere.

2.1 Beskrivelse af et sort hul: metrik og generel relativitetsteori

Man kan ikke snakke sorte huller uden generel relativitetsteori (GR). I GR bevirker tilstedeværelse af masse at rumtiden krummer (her kan man ikke komme udenom den gammelkendte model med en bowlingkugle på en elastisk lagen), i vores del af universet kan vi opsætte et retvinklet koordinatsystem bestående af tre på hinanden vinkelrette retninger x, y og z , dertil lægges tiden som den fjerde dimension. En krum rumtid bevirker at et sådant valg af koordinater kun kan lægges lokalt (en rund kugle ser flad ud hvis man er meget lille i forhold til kuglen og står på dens overflade), en generel beskrivelse af en krum rumtid foretages vha. metrikken der beskriver forbindelsen mellem afstande i rummet og de anvendte koordinater, hvis ds angiver en infinitesimal afstand er metrikken g_{ab} defineret ved:

$$ds^2 = \sum_{a,b=0}^3 g_{ab} dx^a dx^b = g_{ab} dx^a dx^b \quad (2.1)$$

Sidste lighedstegn angiver definitionen af Einsteins summationskonvention der letter formlernes udseende betragteligt: for hvert par af hævede og sænkede indices a_a skal der summeres over $a = 0, 1, 2, 3$ (af specialtilfælde kan nævnes kartesiske koordinater x, y, z og sfæriske koordinater r, θ, ϕ , konventionelt betegner $a = 1, 2, 3$ den rumlige del mens $a = 0$ er tidskomponenten). dx^a angiver en infinitesimal forskydning i dimension a , g_{ab} er altså en 4×4 -matrix (eller rettere en tensor, men denne adskillelse er der ikke brug for her) hvis komponenter afhænger af hvilke koordinater der anvendes. Metrikken kan udledes af Einsteins feltligning og kan findes i flere bøger om emnet, her vil jeg dog blot komme med resultatet[1], der første gang blev udledt af Karl Schwarzschild i 1915:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.2)$$

Denne metrik beskriver rumtiden omkring et sfærisk symmetrisk legeme af masse M . Koordinaterne t, r, θ, ϕ refereres til som Schwarzschild-koordinater. Størrelsen $2GM/c^2$ er det man kender som Schwarzschildradius R , fremover vil denne blive anvendt i diverse udtryk. Dernæst benyttes herfra geometriske enheder i hvilke $c = G = 1$, dels er det konvention, dels slipper man for en masse G 'er og c 'er. Her er benyttet Schwarzschild-koordinater der er en

slags sfæriske koordinater, dette er den mest oplagte måde at udnytte den sfæriske symmetri. Der findes masser af andre koordinater man kan bruge, hver har deres fordele og ulemper. Schwarzschild-koordinaterne udmærker sig ved at metrikken er diagonal (ingen krydsled), til gengæld haves en singularitet ved $r = R$, det viser sig dog at dette ikke er en fysisk singularitet, den kan fjernes ved at skifte til andre koordinater. Gør man dette vil der dog opstå andre ubehageligheder såsom krydsled og en mindre intuitiv forståelse af hvad koordinaterne betyder, f.eks. at blande afstand og tid. Ved $r = 0$ er der til gengæld ikke noget at gøre, dette er en virkelig fysisk singularitet hvor al fysik som vi kender den ophører med at give mening, det vil jeg dog ikke bekymre mig om i denne opgave da det udelukkende er området udenfor begivenhedshorisonten (altså $r > R$) der har interesse.

Så skulle beskrivelsen af rumtiden være på plads, dernæst skal beskrives hvordan legemer i denne krumme rumtid bevæger sig. Newtons anden lov siger at et legemes acceleration er proportional med kraften på legemet:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

hvor proportionalitetskonstanten m er legemets inertielle masse. I GR anses tyngdekraften ikke som en kraft (i modsætning til f.eks. elektromagnetiske kræfter), men derimod en følge af rumtidens krumning (idet det netop er tilstedeværelsen af masse der krummer rummet). Dette billede stammer af observationen af et legemes inertielle masse som den står ovenfor, er den samme som legemets gravitationelle masse der indgår i tyngdeloven. Legemer af forskellig masse falder derfor med samme acceleration. Dette inkorporeres let i GR hvor legemer anses som frie og deres bane gennem rummet er hvad der svarer til en ret linje i planet, en geodæt. Disse kan fastlægges af geodætligningerne, der er en generalisering af Newtons 1. lov til krumt rum (1. lov, da denne udtaler sig om frie legemer):

$$\ddot{x}^a \equiv \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = -\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \equiv -\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \equiv -\Gamma_{bc}^a u^b u^c \quad (2.4)$$

Hvor $u^a \equiv \dot{x}^a \equiv dx^a/d\tau$ er 4-hastigheden, τ er egentiden for legemet og Γ_{bc}^a er Christoffel-symbolerne givet ved:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} \right) = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db,c} - g_{bc,d} + g_{dc,b}) \quad (2.5)$$

Herfra benyttes den kortere notation $\partial g_{ab}/\partial x^c \equiv g_{ab,c}$. Geodætligningen (2.4) kan omskrives til den, til tider, mere anvendelige form (kan også fås fra Lagrange formalismen):

$$\frac{d}{d\tau} (g_{ab} u^b) = \frac{1}{2} g_{bc,a} u^b u^c \quad (2.6)$$

Man kommer nemt tilbage til (2.4) ved at differentiere produktet på venstresiden og flytte lidt rundt. Fordelen ved denne form ses nemt ved at anvende den i praksis, skrevet ud for $a = t, \theta, \phi$ fås:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{R}{r} \right) u^t \right] = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} [r^2 u^\theta] = r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{d\tau} [r^2 \sin^2 \theta u^\phi] = 0 \quad (2.9)$$

Da nogle af højresiderne er 0 haves nogle bevarede størrelser hvilket altid er rart. Med $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u^\theta = 0$ er (2.8) opfyldt, det vil sige at et legeme der starter i et ækvatoriale kredsløb forbliver i et ækvatoriale kredsløb, med dette valg forsimples ligningerne en smule og det er kun nødvendigt at betragte tre af koordinaterne, da θ nu er fastlagt for altid. Fra (2.7) og (2.9) haves de bevarede størrelser til:

$$\left(1 - \frac{R}{r}\right) u^t \equiv e \quad (2.10)$$

$$r^2 u^\phi \equiv \ell \quad (2.11)$$

For $r \rightarrow \infty$ vil $e \rightarrow \frac{dt}{d\tau}$, hvilket er energien pr. enhedsmasse for en massiv partikel, jvf. speciel relativitetsteori, på tilsvarende måde må ℓ være impulsmoment pr. enhedsmasse i $r = \infty$ (se fodnoten næste side). Disse begreber har ikke helt samme mening tæt på et sort hul, men de er stadig bevarede, så de vil blive ganske nyttige i det følgende. Er der tale om lys kan e og ℓ ikke helt fortolkes på denne måde, mere om dette i kapitel 3, dog er de stadig brugbare.

Nu mangler bare en ligning for koordinaten r , man kunne bruge (2.6), men det kommer der ikke umiddelbart noget praktisk ud af, i stedet tages udgangspunkt i metrikken (2.2), deles igennem med $d\tau^2$ samt benyttes at $ds^2 = d\tau^2$ (følger af normalisering af 4-hastigheden, se [1]) for massive partikler fås:

$$1 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) (u^t)^2 - \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 - r^2 (u^\phi)^2 \quad (2.12)$$

Da θ er valgt til en konstant forsvinder leddet med u^θ . Denne ligning vil blive anvendt senere på to forskellige måder ved hhv. den analytiske og numeriske beregning. Her kommer de bevarede størrelser til deres ret, idet de kan bruges til at eliminere u^t og u^ϕ , især praktisk til den analytiske gennemgang.

For lys er situationen en smule anderledes, da lys bevæger sig med lysets hastighed er linjeelementet ds^2 identisk 0 og det samme gælder for egentiden (et ekstremt tilfælde af speciel relativitetsteoris længdeforkortelse og tidsforlængelse), derfor er man nødt til at bruge en såkaldt affin parameter λ i stedet for egentiden, deles (2.2) igennem med $d\lambda^2$ fås:

$$0 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \quad (2.13)$$

På samme måde kan man i geodætligningerne erstatte $d\tau$ med $d\lambda$ når disse skal bruge til at beskrive lys. Definitionen af en affin parameter er at bevægelsesligningen for en lysstråle der ikke påvirkes af eksterne kræfter har samme form som for en massiv partikel i samme situation, nemlig:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} = 0 \quad (2.14)$$

Altså blot Newtons første lov generaliseret til speciel relativitetsteori. Der er ikke nogen fysisk betydning i en affin parameter, så et fysisk resultat kan ikke komme til at afhænge af λ , en skaleret udgave af λ vil jo stadig opfylde (2.14). Hvordan dette giver sig udtryk i praksis vil blive vist senere.

2.2 Det effektive potential

Et godt redskab i analyse af mekaniske/dynamiske problemstillinger er det effektive potential. For en partikel af masse m i et tyngdepotential skabt af et centralt legeme med masse M gælder

af energibevarelse følgende sammenhæng mellem totalenergi E , kinetisk energi K og potential energi V :

$$E = K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) \quad (2.15)$$

Her antages det centrale legeme at ligge stille, hastigheden v er derfor partiklens hastighed. Hvis der er tale om et simpelt cirkulært kredsløb er $v = rd\phi/dt = r\dot{\phi} = \text{konstant}$. Er der også bevægelse i den radiale retning er den totale hastighed givet ved:

$$v = \sqrt{v_r^2 + r^2\dot{\phi}^2} \quad (2.16)$$

Dette kan nemt opnås ved at dele linjeelementet for polære koordinater: $dl^2 = dr^2 + r^2d\phi^2$, med dt^2 . Omskrives vha. impulsmomentet $L \equiv mr^2\dot{\phi}$ (sml. (2.11))¹ der er bevaret i et centralsymmetrisk potential, fås:

$$E = \frac{1}{2}m \left(v_r^2 + r^2 \frac{L^2}{(mr^2)^2} \right) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}mv_r^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (2.17)$$

I stedet for at skulle bekymre sig om to koordinater r og ϕ haves nu en ligning der kun afhænger af r , der er indført en ny størrelse L , men denne er konstant og derfor lettere at have med at gøre. I ovenstående tilfælde kan ligningen løses analytisk og man får at banekurven enten er en ellipse, parabel eller hyperbel, alt efter om E er negativ, 0 eller positiv.

Det smarte er at en lignende fremgangsmåde er brugbar i stort set alle dynamiske problemstillinger, for massive partikler kan metrikken omskrives til noget der minder om (2.17), den direkte fortolkning er ikke triviell, men tæt på, basale overvejelser kan relatere resultatet til kendte størrelser. For lys er kun det overfladiske udseende lig (2.17), dette skyldes at begreber som kinetisk og potentiel energi ikke giver mening for lys, løsningsmetoden er dog fuldt ud den samme.

En ting er klassisk mekanik, kvantemekanisk bliver det lidt anderledes, dog er det let at overføre idéerne, den stationære Schrödingerligning for en ikke-relativistisk partikel skrives traditionelt som:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\Psi = E\Psi(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

hvor bølgefunktionen Ψ og potentialet V generelt er funktioner af alle tre rumlige koordinater. Haves specielt et centralsymmetrisk potential kan man vha. separation af variable altid indføre et effektivt potential der kun afhænger af radialafstanden r så man får:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\mathfrak{R}(r)}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r)\mathfrak{R}(r) = \mathcal{E}\mathfrak{R}(r) \quad (2.19)$$

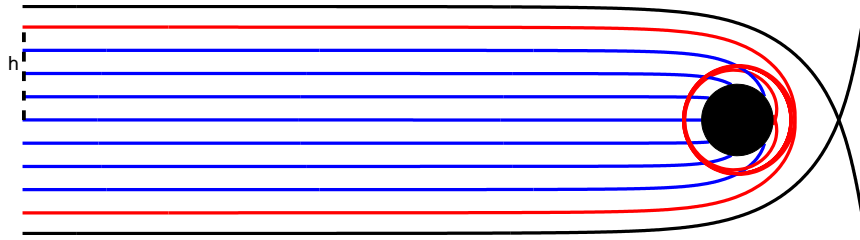
Hvor $\mathfrak{R}(r)$ er radialdelen af Ψ , vinkeldelen vil være de sfærisk harmoniske funktioner $Y_{lm}(\theta, \phi)$ hvis potentialet ikke afhænger af vinklerne. I beskrivelsen af spredning af en kvantemekanisk bølge på et sort hul søges et udtryk af ovenstående form, mere om dette i kapitel 6.

2.3 Tværsnit

Målet med hele denne opgave er det såkaldte absorptionstværsnit. Begrebet tværsnit kendes bl.a. fra kerne- og partikelfysik, hvor det er et mål for reaktionssandsynligheden mellem to

¹Egentlig $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$, ved at opdele hastigheden \vec{v} i en radial og tangential komponent opnås $L = |\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}_\perp| = mrv_\perp = mr \cdot r\dot{\phi}$, da krydsproduktet af to parallelle vektorer er 0 og $v_\perp = r\dot{\phi}$.

partikler eller atomfysik hvor det bruges i forbindelse med spredning af partikler på et target. Partikler kan sagtens spredes på et sort hul, dvs. at deres baner kan ændre retning efter passage af et sort hul, men hvor det i det Newtonske tilfælde er (forholdsvis) simpelt at udregne spredningsvinkelen som funktion af stødparameteren er det næppe muligt at gøre det generelt idet det generel relativistiske tilfælde (små korrektioner såsom præcession af planetbaner er dog ret ligetil). Jeg vil derfor ikke bekymre mig om selve partikelbanerne (undtagen en smule ved den numeriske behandling), men derimod kun være interesseret i om partiklen undslipper eller opfanges. Grænsetilfældet mellem disse to scenarier viser sig at være indfangning i et asymptotisk cirkulært kredsløb omkring det sorte hul.



Figur 2.1: Definition af tværsnit, her med numerisk beregnede baner for lysstråler, gælder dog også for massive partikler. Som vist er h den stødparameter der skal til før ligeme lige akkurat går i kredsløb

Som navnet lyder må tværsnittet have enhed af areal, og der skal dog heller ikke meget til at forestille sig at resultatet må være proportionalt R^2 . Figur 2.1 viser min definition af tværsnittet, nemlig πh^2 , hvor h er stødparameteren for de næstyderste baner, ved større stødparametre vil partiklen blot spredes, mens en mindre stødparameter gør at man rammer begivenhedshorisonten.

Kvantemekanisk kan man ikke stille helt samme billede op, men forventningen er at absorptionen vil give sig udtryk som en formindsket amplitude af den asymptotisk frie plane bølge efter passage af det sorte hul. Dette vil svare til at der er noget sandsynlighed der er forsvundet, hvilket kan fortolkes ved at noget af bølgen er forsvundet ned i det sorte hul. Der skal blive gjort et forsøg på at gøre det analytisk, men desværre viser det sig at jeg ikke kan følge udregningerne helt til ende.

Kapitel 3

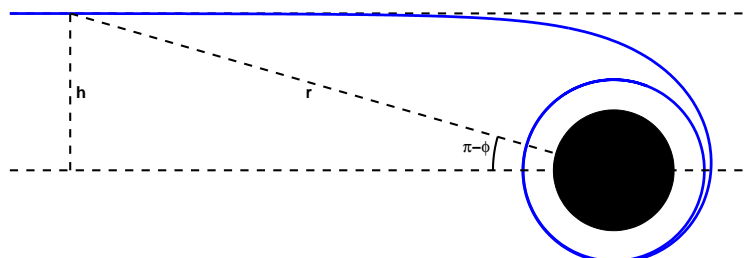
Lys

Jeg vil starte med at finde absorptionstværsnittet for lys, da det algebraisk set er det letteste, fremgangsmåden for massive partikler er den samme, blot lidt mere besværlig. Med de bevarede størrelser e og ℓ bliver (2.13) til:

$$0 = \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} e^2 - \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \quad (3.1)$$

En mindre omskrivning og man får (følgende udregninger er delvist inspireret samt videreført fra [1]):

$$\frac{1}{d^2} \equiv \frac{e^2}{\ell^2} = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \equiv \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + W_{\text{eff}}(r) \quad (3.2)$$



Figur 3.1: Numerisk beregnet banekurve for lysstråle samt definitionen af stødp parameteren h . Figuren er egentlig lidt snyd idet den numeriske beregning altid laver små fejl og banekurven derfor ender med enten at falde ind mod centrum alligevel eller sendes ud igen, dette skyldes at den cirkulære bane er ustabil, her er beregningen stoppet inden dette sker.

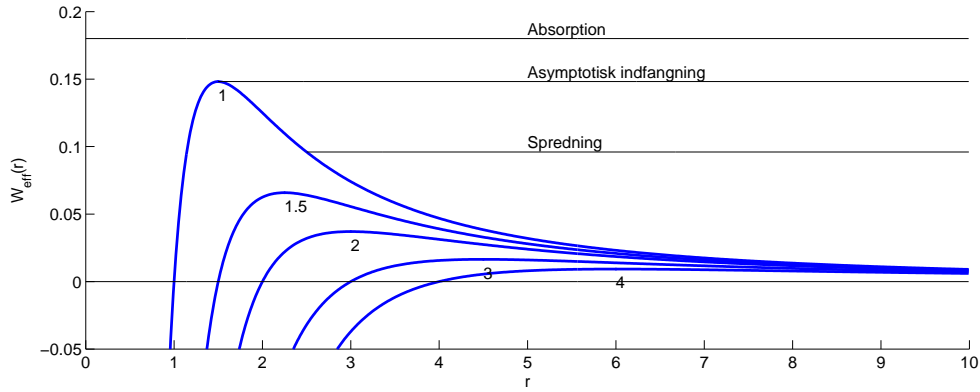
Dette er et udtryk der minder om (2.15), på venstresiden haves en bevaret størrelse $1/d^2$, på højresiden et led med den afledte af radialkoordinaten samt et effektivt potential. Sidstnævnte kan selvfølgelig ikke forstås som et potential i den Newtonske forstand, men for beregningen er dette ligegyldigt. Størrelsen d er indført som forholdet mellem ℓ og e idet lys, som tidligere nævnt, kan beskrives vha. en vilkårlig affin parameter λ , men det endelige fysiske resultat kan ikke afhænge af dette valg, altså kan kun forholdet d have fysisk relevans. d har en meget simpel fysisk fortolkning, fra (2.10) og (2.11) haves for $r \gg R$ samt med λ i stedet for τ :

$$d \equiv \left| \frac{\ell}{e} \right| = \frac{r^2 d\phi/d\lambda}{dt/d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dt} \quad (3.3)$$

På figur 3.1 er vist den numerisk beregnede banekurve for en lysstråle (mere om dette i kapitel 5), vha. de anførte størrelser ses at:

$$\frac{h}{r} = \sin(\pi - \phi) = \sin \phi \approx \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{-h}{r^2} \quad (3.4)$$

I $r = \infty$ må $dr/dt = -1$, da hastigheden er $c = 1$ og banekurven er rettet mod origo. Indsættes i (3.3) fås $d = h$, altså stødparameteren, der, som det ses på figur 3.1, angiver den asymptotiske afstand fra en linje gennem det sorte hul, parallel med starthastighedsvektoren, hvis der ikke var nogen tiltrækning ville det være den korteste afstand mellem legemet og det sorte hul, vist ved den øverste stiplede linje på figuren.



Figur 3.2: Det effektive potential $W_{\text{eff}}(r)$ for lys for forskellige værdier af R .

På figur 3.2 ses det effektive potential for forskellige værdier af R , der er endvidere indlagt tre forskellige linjer, svarende til tre forskellige d , for store d (og dermed små $1/d^2$) kan potentialbarrieren ikke overvindes, lyset vil derfor spredes i en eller anden vinkel i forhold til den indkommende retning, alt efter hvor højt op ad barrieren lyset når. Jo mindre d jo tættere på det sorte hul kommer lyset, indtil det til sidst kommer over barrieren og efterfølgende falder hurtigt ned i hullet, altså absorption. Grænseværdien for om der er spredning eller absorption går ved potentialets maksimumværdi der findes ved radius r_{max} :

$$\frac{dW_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{2}{r^3} + \frac{3R}{r^4} = 0 \Rightarrow r_{\text{max}} = \frac{3R}{2} \quad (3.5)$$

Det effektive potential har da som maksimumværdi:

$$W_{\text{max}}(R) \equiv W_{\text{eff}}(r_{\text{max}}) = \left(\frac{2}{3R}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27} \frac{1}{R^2} \quad (3.6)$$

Hvis venstresiden af (3.2) er mindre en denne værdi vil lyset sendes tilbage mod uendelig i en vinkel i forhold til den indkommende retning. Ved værdier større end W_{max} ender lyset med at falde ind i hullet. Et cirkulært kredsløb betyder $u^r = 0$, hvilket kan ske netop hvis værdien af $1/d^2$ er $W_{\text{max}}(R)$, lyset går i kredsløb eller absorberes hvis:

$$\frac{1}{d^2} \geq \frac{4}{27R^2} \Rightarrow d \leq \frac{\sqrt{27}}{2} R \quad (3.7)$$

Absorptionstværsnittet σ_{lys} er da:

$$\sigma_{\text{lys}} = \pi h^2 = \pi d^2 = \frac{27}{4} \pi R^2 = 27\pi \frac{G^2 M^2}{c^4} \quad (3.8)$$

De relevante naturkonstanter er her genindført for fuldkommenhedens skyld. Det geometriske tværsnitsareal af det sorte hul er πR^2 , det effektive areal (hvis man erstattede det sorte hul af en hård, ikke-tiltrækkende kugle og ønskede at de samme lysstråler ramte kuglen som dem der rammer begivenhedshorizonten) er altså næsten 7 gange større, hvilket selvfølgelig skyldes tiltrækningen. Som forventet i afsnit 2.3 er resultatet proportionalt med R^2 , dette fulgte ganske naturligt af fremgangsmåden.

Skulle man se på et område hvor denne beregning kunne have relevans er gravitationslinsning et godt valg. Nok er det her ikke afbøjning, men absorption der er regnet på, men problemstillingerne er nært beslægtede. Store massekoncentrationer kan påvirke lyset fra en bagvedliggende kilde og fokusere strålerne så objektet forstærkes og derved får man mulighed for at se legemer der ligger længere væk end det er muligt med traditionelle metoder uden astrofysisk hjælp. I midten af sådan et billede må der (teoretisk set, hvis det er et sort hul der virker som linse) være et mørkt område fordi noget af lyset er absorberet. Dette område må netop have arealet σ_{lys} , dog vil de bogstaveligt talt astronomiske afstande gøre at man næppe vil kunne se dette observationelt.

Radius for den næsten-cirkulære kredsløb på figur 3.1 ses af (3.5) at være $\frac{3}{2}$ gange Schwarzschildradius (når jeg i næste kapitel finder den tilsvarende radius for ultrarelativistiske massive partikler viser det sig at et højst uventet tal dukker op). At denne radius er større end R betyder at det ikke kun er sorte huller der kan indfange lysstråler, f.eks. vil en neutronstjerne med en radius mellem $\frac{3}{2}R$ og R også kunne gøre det. Ved radier større end $\frac{3}{2}R$ kan lyset selvfølgelig også absorberes, men kun fordi det rammer overfladen, kredsløb vil ikke være en mulighed.

Bare for at sætte lidt i perspektiv kan man regne på solen, med en masse på 1.989×10^{30} kg får man $\sigma_{\text{lys}} = 185.0 \text{ km}^2$, hvilket set fra Jorden (i en afstand af 1 AU=149.6 mio. km) er en cirkelskive med vinkeludstrækning på omkring 0.021", ikke særlig meget.

Det var mere eller mindre det der var at sige om lys i denne sammenhæng, i næste kapitel bliver det massive partikler der tages fat på. Idéen er den samme, men matematikken mere træls.

Kapitel 4

Massive partikler

Udregningen af tværsnittet for lys var ligetil, her vil jeg gøre det samme for massive partikler. Relevansen kunne være i forbindelse med tilvækstskiven omkring et sort hul, hvor interstellart støv kredser omkring og opvarmes til det udsender røntgenstråling der kan detekteres med teleskoper. Opvarmningen skyldes gnidning mellem partikler der ligeledes sørger for at nogle af partiklerne mister impulsmoment hvorefter de efter nogen tid falder ind bag begivenheds-horisonten.

4.1 Effektiv potential

Lige som i forrige kapitel indføres de bevarede størrelser e og ℓ fra (2.10) og (2.11), (2.12) kan da omskrives til følgende udtryk:

$$\frac{e^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}(u^r)^2 - \frac{R}{2r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{R\ell^2}{2r^3} \quad (4.1)$$

Defineres størrelsen på venstre side som $\mathcal{E} \equiv (e^2 - 1)/2$, samt de sidste tre led på højresiden som $V_{\text{eff}}(r)$ fås følgende relation:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(u^r)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad V_{\text{eff}}(r) \equiv -\frac{R}{2r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{R\ell^2}{2r^3} = -\frac{R}{2r} + \frac{\ell^2}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \quad (4.2)$$

Dette er netop hvad der ønskes ud fra diskussionen i sektion 2.2, en konstant størrelse på venstresiden og på højdesiden et led med den førsteafledte af radialkoordinaten samt et led der gør det ud for et effektivt potential. Dette udtryk minder en del om det klassiske udtryk (2.17), men ligheden kan gøres betydeligt større ved at søge den urelativistiske grænse. Fra diskussionen omkring (2.10) må gælde:

$$e \equiv \frac{mc^2 + E_{\text{Newt}}}{mc^2} \quad (4.3)$$

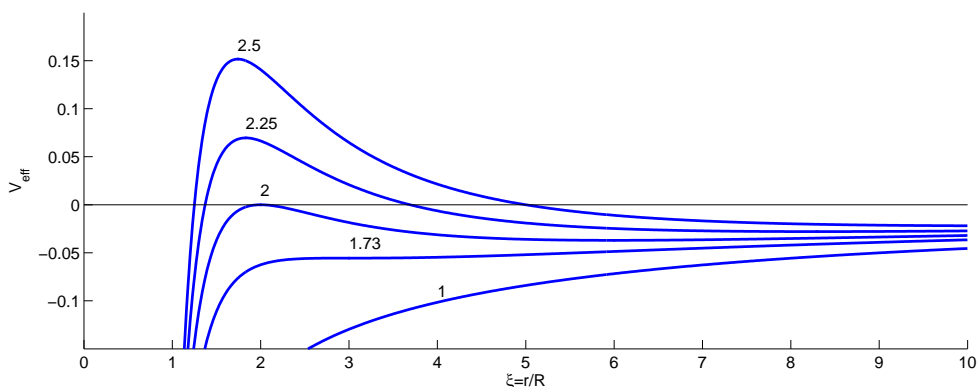
Da e jo er totalenergi pr. enhedshvilemasse, ovenstående definerer også størrelsen E_{Newt} som den klassiske Newtonske energi, både kinetisk og potentiel. Næste skridt er at genindføre naturkonstanterne c og G , dette sker ved erstatningerne $R \rightarrow 2GM/c^2$, $d\tau \rightarrow cd\tau$ (og dermed $\ell \rightarrow \ell/c$) og endelig $d\tau \rightarrow dt$. Da $E_{\text{Newt}} \ll mc^2$ i den urelativistiske grænse giver indsættelse i (4.2), efter lidt omskrivning og bortsmidning af små led, følgende:

$$E_{\text{Newt}} = \frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \quad (4.4)$$

Hvor $L = m\ell$ er det totale impulsmoment. Dette er næsten (2.17) der er opnået fra Newtonsk mekanik, eneste forskel er det sidste led, den relativistiske korrektion til Newtons tyngdelov i den ikke-relativistiske grænse. For $r \gg R$ ses korrektionen at være lille, dette vil altid være tilfældet i den ikke-relativistiske grænse, men udtrykket kan sikkert anvendes til f.eks. at finde præcession af perihelion, hvis man skulle have lyst til det.

I grænsen $r \rightarrow R$ kan ovenstående udtryk ikke anvendes, men så springer man bare tilbage til (4.2) der er helt generel. Det bemærkelsesværdige er at for r tilstrækkeligt tæt på R vil centrifugalbarrieren kunne negligeres i forhold til det tiltrækkende første led, altså er der ikke noget der hindrer absorption når først man er kommet tæt nok på. Denne grænse for "tæt-nok-på" er hvad der kvantitativt bestemmer om der absorberes, men spørgsmålet er hvad dette svarer til af stødp parameter når man er langt væk, dette skal nu undersøges.

Problemet er nu reduceret til 1 dimension, noget af en simplificering fra de oprindelige fire t, r, θ og ϕ . Det effektive potential afhænger af massen af det sorte hul samt af impulsmomentet. Maksimum af potentialet viser sig kun at afhænge af forholdet mellem ℓ og R (eller ækvivalente forhold) hvilket udledes herunder. På figur 4.1 er det effektive potential plottet for forskellige værdier af $b \equiv \ell/R$, som funktion af $\xi = r/R$, disse enhedsløse størrelser gør arbejdet lettere at overskue.



Figur 4.1: Det effektive potential for forskellige værdier af $b = \ell/R$, som angivet på graferne.

Med de ovenfor indførte størrelser får det effektive potential formen:

$$V_{\text{eff}}(\xi) = -\frac{1}{2\xi} + \frac{b^2}{2\xi^2} - \frac{b^2}{2\xi^3} \quad (4.5)$$

Dette er plottet på figur 4.1 for forskellige b , jo større b jo højere er barrieren (kurvens maksimum), dette passer meget godt da store b svarer til store impulsmomenter ℓ . Det ses at potentialet kan have enten to eller intet ekstrema, disse findes ved at differentiere V_{eff} mht. ξ og sætte lig 0:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\xi} &= \frac{1}{2\xi^2} - \frac{b^2}{\xi^3} + \frac{3b^2}{2\xi^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^2 - 2b^2\xi + 3b^2 = 0 \\ \xi_{\min}^{\max} &= \frac{2b^2 \pm \sqrt{4b^4 - 4 \cdot 1 \cdot 3b^2}}{2} = b^2 \pm b\sqrt{b^2 - 3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

ξ_{\min}^{\max} angiver om koordinaten hører til potentialets minimum eller maksimum. Ved disse radier er der mulighed for cirkulære kredsløb omkring det sorte hul, dog er det inderste cirkulære kredsløb ustabil, idet det ligger ved et potentialmaksimum, en lille forstyrrelse og

det cirkulerende legeme vil enten falde ned i hullet eller sendes bort. Partikler der kommer ind fra uendelig med $\mathcal{E} = V_{\text{eff}}(\xi_{\text{max}})$ vil blive opfanget i et asymptotisk cirkulært kredsløb, ved større \mathcal{E} vil legemet falde ned i det sorte hul og absorberes. For et givet \mathcal{E} findes altså et kritisk ℓ så legemet lige præcis går i cirkulært kredsløb, dette ℓ kan relateres til stødparameteren h , hvoraf absorptionstværsnittet fås. Der er her en en-til-en analogi med fremgangsmåden for lys i forrige kapitel.

Et par yderligere egenskaber for det effektive potential:

- For $b = 2$ er $\xi_{\text{max}} = 2$ og $V_{\text{eff}}(\xi_{\text{max}}) = 0$, for mindre b vil det altså ikke være muligt for partikler med positiv \mathcal{E} at gå i kredsløb om det sorte hul, dvs. alle partikler der starter i uendelig med en hastighed mod hullet vil absorberes. Bundne kredsløb (cirkulære eller "blomsterlignende", se kapitel 5) med $\mathcal{E} < 0$ er dog en mulighed.
- For $b = \sqrt{3} = 1.73$ er $\xi_{\text{max}} = \xi_{\text{min}} = 3$, både første- og andenafledte er 0 i punktet $\xi = 3$, så der er ikke mulighed for et decideret stabilt kredsløb. $\xi = 3$ angiver dog den inderste radius hvorunder intet cirkulært stabilt kredsløb er muligt, derfor kaldes $r = 3R$ for r_{ISCO} , Innermost Stable Cirkular Orbit, Inderste Stabile Cirkulære Kredsløb.

4.2 Udledning af tværsnittet

Kun værdier af \mathcal{E} større end 0 har her relevans. Værdien af maksimum af det effektive potential ønskes nu fundet, det gøres ved at skrive lidt om på (4.5) og indsætte ξ_{max} :

$$V_{\text{eff}}^{\text{max}}(b) \equiv V_{\text{eff}}(\xi_{\text{max}}) = -\frac{1}{2} [\xi_{\text{max}}^2 - b^2\xi_{\text{max}} + b^2] \xi_{\text{max}}^{-3} \quad (4.7)$$

I den kantede parentes indsættes ξ_{max} fra (4.6):

$$[\dots] = b^4 + b^4 - 3b^2 - 2b^3\sqrt{b^2 - 3} - b^4 + b^3\sqrt{b^2 - 3} + b^2 = b^2 (b^2 - b\sqrt{b^2 - 3} - 2) \quad (4.8)$$

Indsat i (4.7) fås at maksimum kun afhænger af b , altså forholdet mellem ℓ og R , som tidligere nævnt:

$$V_{\text{eff}}^{\text{max}}(b) = -\frac{b^2 - b\sqrt{b^2 - 3} - 2}{2b(b - \sqrt{b^2 - 3})^3} \quad (4.9)$$

Nu ønskes $V_{\text{eff}}^{\text{max}}(b) = \mathcal{E}$ løst for b , dette kan gøres analytisk, med en mindre omgang algebra, ovenstående omskrives nemt til:

$$b\sqrt{b^2 - 3} - b^2 + 2 = 2b\mathcal{E} (b - \sqrt{b^2 - 3})^3 \quad (4.10)$$

Parentesen på højre side ganges ud og led med $\sqrt{b^2 - 3}$ samles på venstre siden, hvorefter begge sider kvadreres:

$$(6b\mathcal{E} - b - 8b^3\mathcal{E})^2(b^2 - 3) = (8b^4\mathcal{E} + (1 - 18\mathcal{E})b^2 - 2)^2 \quad (4.11)$$

Venstre VS og højre side HS ganges ud hver for sig:

$$\text{VS} = 64b^8\mathcal{E}^2 + (-288\mathcal{E}^2 + 16\mathcal{E})b^6 + (324\mathcal{E}^2 - 60\mathcal{E} + 1)b^4 + (-108\mathcal{E}^2 + 36\mathcal{E} - 3)b^2 \quad (4.12)$$

$$\text{HS} = 64b^8\mathcal{E}^2 + 16(1 - 18\mathcal{E})b^6\mathcal{E} + (324\mathcal{E}^2 - 68\mathcal{E} + 1)b^4 - 4(1 - 18\mathcal{E})b^2 + 4 \quad (4.13)$$

Til stor lettelse forsvinder led med b^6 og b^8 når højre side sættes lig venstre, tilbage er en simpel andengradsligning i b^2 :

$$8\mathcal{E}b^4 + (-108\mathcal{E}^2 - 36\mathcal{E} + 1)b^2 - 4 = 8\mathcal{E}b^4 - \chi b^2 - 4 = 0 \quad (4.14)$$

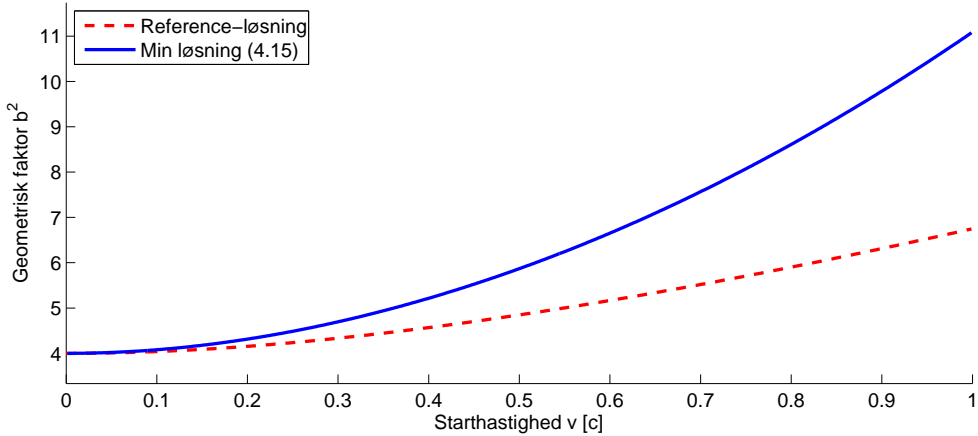
Hvor størrelsen $\chi = 108\mathcal{E}^2 + 36\mathcal{E} - 1$ er introduceret for at øge overskueligheden, løsningen er nu:

$$b^2 = \frac{\chi \pm \sqrt{\chi^2 + 128\mathcal{E}}}{16\mathcal{E}} \quad (4.15)$$

Kun den positive løsning bruges. Absorptionstværsnittet σ_{massiv} findes nu fra definitionen af $b = \ell/R$ samt $\ell = vh$ (som i note 1 side 5, blot opløses stedvektoren i komponenter parallel med og vinkelret på hastigheden \vec{v} , den vinkelrette komponent er netop stødparameteren h), hvor v er starthastigheden i $r = \infty$:

$$\sigma_{\text{massiv}} = \pi h^2 = \pi \frac{\ell^2}{v^2} = \pi \frac{b^2 R^2}{v^2} = \frac{\pi R^2}{v^2} \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 128\mathcal{E}}}{16\mathcal{E}} \quad \chi = 108\mathcal{E}^2 + 36\mathcal{E} - 1 \quad (4.16)$$

Igen er tværsnittet proportionalt med R^2 . Den geometriske faktor efter $\pi R^2/v^2$ varierer forholdsvis langsomt og ikke mere end en faktor 3 i intervallet $0 < v < 1$, se figur 4.2, i det store hele går tværsnittet altså som v^{-2} .



Figur 4.2: Den geometriske faktor b^2 fra (4.15), desuden et plot af et resultat fundet i en artikel om emnet, se mere herom sidst i kapitlet.

4.3 Diskussion af resultat samt sammenligning

Det er interessant at kigge på nogle grænseværdier, i den ikke-relativistiske grænse $v \ll 1$ haves i $r_0 = \infty$ fra (4.1) at $\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 \ll 1$, dermed bliver $\chi = 18v^2 - 1$ til første orden i v^2 , for lave hastigheder haves:

$$b^2 \approx \frac{18v^2 - 1 + \sqrt{(1 - 18v^2)^2 + 64v^2}}{8v^2} \approx \frac{18v^2 - 1 + (1 + 14v^2)}{8v^2} = 4 \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\text{massiv}}^{v \ll c} = \frac{4\pi R^2}{v^2} = \frac{16\pi G^2 M^2}{v^2 c^2} \quad (4.18)$$

Det vil sige at tværsnittet divergerer for små hastigheder, dette giver udmærket mening, idet partikler med neglignel starthastighed har neglignel impulsmoment og dermed ingen centrifugalbarriere der skal overvindes som på figur 4.1. Dette passer også perfekt med at potentialets maksimumværdi for $b = 2$ er 0.

Den relativistiske grænse $v \rightarrow 1$ giver $\mathcal{E} \rightarrow \frac{1}{2}$ og $\chi \rightarrow 44$, indsættelse i (4.15) giver da:

$$b^2 \rightarrow \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} \approx 11.09 \quad (4.19)$$

$$\sigma_{\text{massiv}}^{v \approx c} = \frac{\pi R^2}{v^2} \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} = (22 + 10\sqrt{5})\pi \frac{G^2 M^2}{v^2 c^2} \quad (4.20)$$

Man kunne måske forvente at denne grænseværdi skulle være lig resultatet for lys (3.7), men dette viser sig ikke at være tilfældet, det her fundne tværsnit er større end for lys. Den fundamentale forskel i udledningen for lys og massive partikler var, hvorvidt linjeelementet ds^2 var endeligt eller 0, og resultatet af denne forskel må være forskellen mellem ovenstående og (3.7).

Et interessant resultat kommer frem når man udregner hvilken ξ_{max} den her fundne grænseværdi svarer til, fra (4.6) fås:

$$\xi_{\text{max}} = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} - 3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (4.21)$$

Sidste lighedstegn følger ganske simpelt af at udregne produktet af de store kvadratrødder. Fra definitionen af $\xi = r/R$, haves at kredsløbet for en ultrarelativistisk partikel der lige akkurat rammer toppen af potentialbarrieren (figur 4.1) har en radius på ξ_{max} gange Schwarzschild-radius.

Det interessante ved dette tal er at det netop er værdien af det såkaldte Gyldne Snit, historisk betegnet φ , der foruden at have stor æstetisk anvendelse i kunst, arkitektur og musik også optræder forbløffende mange steder i naturen. Nu er der altså fundet endnu et sted hvor tallet optræder, dog er situationen ret usandsynlig i praksis, dels fordi der her er regnet på ikke-roterende sorte huller, dels fordi det kræver at partiklen med matematisk nøjagtighed har den påkrævede stødparameter. Men det er da et ganske tankevækkende resultat alligevel.

Fra [2] haves et andet analytisk udtryk for tværsnittet og det er brugbart at sammenligne det her fundne udtryk med artiklens, der har formen:

$$\sigma_C = \frac{\pi R^2}{v^2} \left[\frac{[8(1 - v^2)]^3}{16(1 - 4v^2 + \sqrt{1 + 8v^2})(3 - \sqrt{1 + 8v^2})^2} \right] \quad (4.22)$$

På figur 4.2 er udtrykket i kantet parentes også plottet, der ses en klar forskel mellem de to grafer. Det er meget belejligt at de dog har den samme grænseværdi for $v \rightarrow 0$, nemlig 4. I den anden grænse sker det til gengæld andre ting, som beskrevet ovenfor giver min løsning ikke tværsnittet for lys i den ultrarelativistiske grænse, det gør derimod løsningen givet ovenfor.

I artiklen kommenteres at ovenstående er fremkommet ved at betragte indkommende partikler som punktpartikler, hvilket også er hvad jeg har gjort. Dette skulle være gjort i en anden artikel fra Kiev University Press, 1962. Det har desværre ikke muligt at finde denne artikel og sammenligne udledningerne, hvilket nok kunne have været meget lærerigt. Foruden at finde disse udregninger er der nok ikke så meget andet at gøre end at tage ud til et sort hul og lave eksperimenter, men det er jo heller ikke så ligetil. Som det bliver vist i næste kapitel kan mit resultat dog eftervises numerisk, hvilket jeg tager som støtte til min fremgangsmåde.

Kapitel 5

Numerisk løsning

I de to foregående kapitler blev fundet analytiske løsninger til absorptionstværsnit for lys og massive partikler. Hvad der ikke er muligt at beregne analytisk, men meget interessant for forståelsen af situationen, er banekurven for de indkommende partikler. Det er heldigvis ikke særlig svært at løse de relevante ligninger numerisk, så det vil jeg gøre i dette kapitel.

Der opstår en lille komplikation i og med numerisk løsning af et sæt differentialligninger oftest tager sig ud som løsning af et startværdiproblem, i nærværende problemstilling er startbetingelserne ikke kendte og ønskes bestemt, således at specifikke slutbetingelser opnås, altså et grænseværdiproblem, dette findes der en løsning for som bliver gennemgået senere.

5.1 Ligninger samt start-/grænsebetingelser

Den numeriske løsning bygger på geodætligningerne (2.4), der skal skrives ud for $a = t, r$ og ϕ (θ er valgt til $\frac{\pi}{2}$), til dette skal bruges Christoffel-symbolerne, der kan findes i enhver lærebog om emnet, f.eks. [1], de i denne omgang relevante symboler er (med $\theta = \pi/2$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{tt}^r &= \frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \\ \Gamma_{rr}^r &= -\frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r \left(1 - \frac{R}{r}\right) & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Metrikken leder til andre ikke-forsvindende Christoffel-symboler, men enten gør $\theta = \pi/2$ at de bliver 0, eller også skal de ganges på led som u^θ der jo er 0. Skrives $\frac{dt}{d\tau} = \dot{x}^t = \dot{t}$ og tilsvarende for de resterende koordinater samt dobbelt afledede fås af (2.4):

$$\ddot{t} = -\Gamma_{bc}^t \dot{x}^b \dot{x}^c = -\Gamma_{tr}^t u^t u^r \cdot 2 = \frac{-R}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} u^t u^r = -\frac{R}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-2} e u^r \quad (5.2)$$

$$\ddot{\phi} = -\Gamma_{bc}^\phi u^b u^c = -\Gamma_{r\phi}^\phi u^r u^\phi \cdot 2 = -\frac{2}{r} u^r u^\phi = -\frac{2j}{r^3} u^r \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -\Gamma_{bc}^r u^b u^c = -(\Gamma_{rr}^r (u^r)^2 + \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 + \Gamma_{\phi\phi}^r (u^\phi)^2) \\ &= -\left(-\frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + \frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-2} - r \left(1 - \frac{R}{r}\right) \frac{j^2}{r^4}\right) \\ &= -\left(\frac{R}{2r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-2} (e^2 - (u^r)^2) - \left(1 - \frac{R}{r}\right) \frac{j^2}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Diverse faktorer af 2 fremkommer idet Christoffel-symbolerne er symmetriske i de to nederste indices. De bevarede størrelser e og ℓ er indført fra (2.10) og (2.11) for at forbedre den numeriske løsning af ligningerne, det er dermed sikret eksplicit at størrelserne er bevarede og numeriske fejl får mindre betydning, desuden bliver det lettere at vælge de korrekte startbetingelser.

Den numeriske løsning vil blive foretaget med MatLabs `ode45` rutine, der dog kræver førsteordens differentialligninger, de tre forhåndenværende andenordensligninger kan laves om til seks førsteordens ligninger vha. følgende trick:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} t \\ r \\ \phi \\ u^t \\ u^r \\ u^\phi \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \begin{bmatrix} u^t \\ u^r \\ \dot{t} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \\ \mathbf{p}_6 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

og hvor (5.2) til (5.4) bruges som \ddot{t} , \ddot{r} og $\ddot{\phi}$ med $r = \mathbf{p}_2$ og $u^r = \mathbf{p}_5$. \mathbf{p}_i angiver den i 'te indgang i \mathbf{p} -vektoren. Nu haves 6 koblede førsteordensdifferentialligninger der er klar til at blive løst af `ode45`, men først skal bruges de rigtige startbetingelser.

Som startbetingelser skal bruges startkoordinater (t_0, r_0, ϕ_0) og afledte (u_0^t, u_0^r, u_0^ϕ) , dog er det for opsætningens skyld lettere at vælge startkoordinater (t_0, x_0, y_0) og startafledte (u_0^t, v_{x0}, v_{y0}) . Uden tab af generalitet kan vælges $t_0 = 0$, da ligningerne ikke afhænger af tiden. Egentlig skulle ligningerne løses med $r_0 = \infty$, men da det gøres numerisk er dette ikke muligt, i stedet vælges en meget stor værdi for $r_0 \gg R$. Da r og ϕ er almindelige polære koordinater gælder $x_0 = r_0 \cos \phi_0$ og $y_0 = r_0 \sin \phi_0$, dermed er:

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad \phi_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \arg(x_0 + iy_0) \quad (5.6)$$

Det sidste udtryk med det komplekse i bruges i MatLab for at få den rigtige fase ϕ_0 . Nu ønskes (u_0^r, u_0^ϕ) udtrykt ved (v_{x0}, v_{y0}) , samt evt. (r_0, ϕ_0) , dette gøres på følgende måde:

$$v_{x0} = \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{d\tau}(r \cdot \cos \phi) \right|_{t=t_0} = u_0^r \cdot \cos \phi_0 - r_0 \cdot \sin \phi_0 \cdot u_0^\phi \quad (5.7a)$$

$$v_{y0} = \left. \frac{dy}{d\tau} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{d\tau}(r \cdot \sin \phi) \right|_{t=t_0} = u_0^r \cdot \sin \phi_0 + r_0 \cdot \cos \phi_0 \cdot u_0^\phi \quad (5.7b)$$

Nok differentieres der mht. τ , men i startpositionen $r_0 = \infty$ er $t = \tau$ alligevel, så det gør ikke nogen forskel. Dette ligningssystem løses ganske simpelt for u_0^r og u_0^ϕ og giver:

$$u_0^r = v_{x0} \cdot \cos \phi_0 + v_{y0} \cdot \sin \phi_0 \quad (5.8a)$$

$$u_0^\phi = \frac{1}{r_0}(v_{y0} \cdot \cos \phi_0 - v_{x0} \cdot \sin \phi_0) \quad (5.8b)$$

u_0^t og et alternativt udtryk for u_0^ϕ fås af (2.10) og (2.11) som:

$$u_0^t = \frac{e}{1 - \frac{R}{r_0}} \quad u_0^\phi = \frac{\ell}{r_0^2} \quad (5.9)$$

Med (5.8b) fås nu:

$$\ell = r_0^2 u_0^\phi = r_0(v_{y0} \cdot \cos \phi_0 - v_{x0} \cdot \sin \phi_0) = x_0 v_{y0} - y_0 v_{x0} \quad (5.10)$$

Dette er netop det klassiske udtryk for impulsmoment (pr. enhedsmasse), det kommer ikke som nogen stor overraskelse, men er alligevel et vigtigt resultat, der ikke kan tages for givet.

Nu haves næsten alt hvad der skal bruges for at begynde den numeriske løsning, der mangler bare en passende værdi for konstanten e . Hvis en massiv partikel lå stille i uendelig ville $e = u^t = 1$, ligningerne kan løses analytisk og bevægelsen for radiale frit fald mod det sorte hul kan findes, dette er dog for $\ell = 0$, hvilket ikke er af interesse her.

Indføres de bevarede størrelser e og ℓ i ligning (2.12) fås det ønskede udtryk:

$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{\ell^2}{r_0^2}\right) \left(1 - \frac{R}{r_0}\right) + (u_0^r)^2} \quad (5.11)$$

For lys fås haves fra (2.13):

$$e = \sqrt{\frac{\ell^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{R}{r_0}\right) + (u_0^r)^2} \quad \text{hvor} \quad u^r = \frac{dr}{d\lambda} \quad (5.12)$$

De to ovenstående ligninger er den eneste forskel mellem løsningen for lys og massive partikler.

Nu haves alle startbetingelserne, hvad der mangler nu er en passende slutbetingelse. Måden hvorpå et startværdiproblem, der kan løses forholdsvis simpelt ved numeriske metoder, løses som et grænseværdiproblem, er ganske simpelt ved at prøve sig frem. Man prøver med et sæt startbetingelser og undersøger værdien af den størrelse der skal have en bestemt slutværdi, hvis det ikke passer med den forventede værdi prøver man andre startbetingelser. Sådan fortsættes til den ønskede slutværdi er opnået til en eller anden nøjagtighed, dette er heldigvis ganske simpelt med MatLab.

Det ønskede resultat er at den indkommende partikel går i cirkulært kredsløb omkring det sorte hul, det vil sige at den radiale hastighed skal være 0, altså søges $u^r \rightarrow 0$ for $\tau \rightarrow \infty$. Dette krav kan ikke søges eksakt da den numeriske integration ikke kører til ∞ , men noget tilsvarende vil blive gjort.

5.2 Programgennemgang

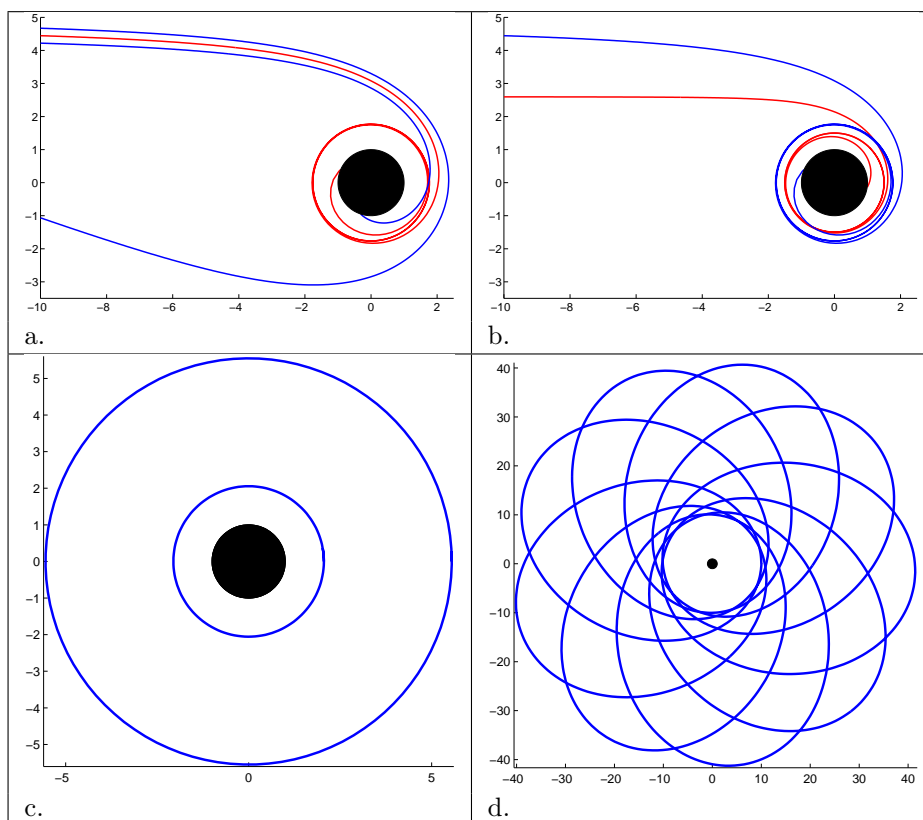
Den numeriske løsning foregår i flere afdelinger, alt efter hvad man ønsker. For blot at beregne banekurven for en bestemt startopstilling bruges programmet `numloesning.m` (se appendix A for programkoderne), der som input tager startsted (x_0, y_0) , starthastighed (v_{x0}, v_{y0}) samt Schwarzschildradius R af det sorte hul og den tid der skal integreres over. Nu er det imidlertid ikke banekurven som sådan der er af interesse, men derimod hvordan startbetingelserne skal være for at vi får en ganske bestemt banekurve, nemlig en hvor partiklen lige nøjagtig går i kredsløb omkring hullet.

Dette kan løses numerisk ved at lave en funktion der som input tager startbetingelserne og som output giver u^r , der skal så findes nulpunkt for denne funktion mht. startbetingelserne. Mere specifikt vil det være stødparameteren (der er det samme som y_0 hvis x_0 vælges meget stor) der er den egentlige variabel. I programmet `findmin.m` anvendes Matlabs indbyggede `fzero`-funktion til netop dette formål.

På figur 5.1a ses en illustration af fremgangsmåden, her er plottet banekurven for den numerisk fundne stødparameter der giver cirkulært kredsløb samt for to værdier der ligger lidt over og lidt under denne værdi. Det ses først tydelig forskel på banekurverne i umiddelbar nærhed af det sorte hul. At legemet der burde gå i kredsløb alligevel falder ind mod centrum efter et par omgange skyldes numeriske unøjagtigheder, som nævnt tidligere er denne cirkulære bane et ustabil ligevægtspunkt.

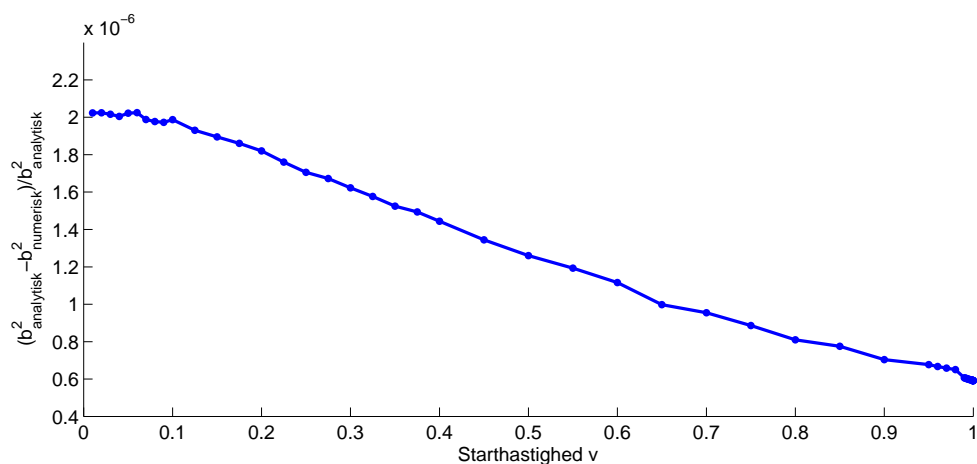
Der er en lille sidebemærkning ved denne fremgangsmåde, Matlab søger rigtig nok at finde nulpunkt for u^r , men den værdi der returneres til **fzero** er værdien af u^r i det sidste datapunkt på kurven, der enten ligger langt fra hullet hvis partiklen spredes (selv ved midlertidig indfangning kan partiklen forsvinde igen) eller inde ved Schwarzschild-radius, idet integrationen stopper her, for ikke at komme i problemer ved singulariteten. Det vil sige to steder hvor den radiale hastighed altid er forskellig fra 0, men heldigvis er **fzero**-funktionen bygget op så den leder efter steder hvor funktionsudtrykket skifter fortegn, hvilket jo netop er tilfældet i de to relevante punkter, enten er u^r positiv hvis partiklen spredes eller også er den negativ, hvis den fortsætter ind under begivenhedshorisonten. Et decideret nulpunkt finder den altså ikke, men metoden ser ud til at virke fint alligevel.

Figur 5.1b-d viser også fint hvilke muligheder der er for banekurver. Foruden spredning eller indfangning er der også mulighed for bundne baner, cirkulære baner ved $\xi_{\min/\max}$, figur 5.1c, samt ikke nærmere definerbare baner hvor fænomenet præcession virkelig kommer i sin ret, figur 5.1d.



Figur 5.1: a. En illustration af hvordan problemet løses numerisk. Som startbetingelser er valgt $x_0 = 10^6$, $v_{y0} = 0$, $v_{x0} = 0.5$. b. Sammenligning mellem en lyskurve $v_{x0} = 1$ og banekurven for en partikel med $v_{x0} = 0.5$, desuden er $R = 1$. c. Eksempler på cirkulære kredsløb, startbetingelserne x_0 og v_{y0} blev fundet ved at vælge en bestemt værdi for l og finde de dertilhørende $\xi_{\min/\max}$, den inderste bane er ustabil. d. Eksempel på et bundet ikke-cirkulært kredsløb hvor der er overdreven præcession, men det er en flot figur. For alle figurer angiver radius af den sorte plet den korrekte Schwarzschild-radius i forhold til banekurverne, akserne angiver ξ , altså afstand i enheder af R .

Hovedformålet med programmet er foruden at finde banekurverne også at validere de analytisk fundne resultater fra de to foregående kapitler. For en given startværdi af hastigheden finder programmet den tilsvarende stødpå parameter der giver asymptotisk indfangning og returnerer den relevante værdi. På figur 5.2 ses den relative afvigelse mellem det numerisk fundne værdier og de tilsvarende værdier fra det analytiske resultat (4.15):



Figur 5.2: Den relative afvigelse mellem analytisk og numerisk fundne resultater som funktion af starthastigheden.

Som det ses er afvigelsen af relativ størrelsesordenen 10^{-6} , hvilket er ganske godt. At forskellen bliver mindre jo større v er kan jeg ikke umiddelbart finde nogen forklaring på. Der er desuden en mindre fluktuation på afvigelsen fra gang til gang når man kører programmet, men denne er yderligere en størrelsesorden eller to mindre. Figuren er åbenlyst fremkommet ved at regne på massive partikler, regnes i stedet på lys findes værdien fra (3.8) med en relativ fejl på $\sim 10^{-9}$, hvilket er endnu bedre. Den analytiske fremgangsmåde støttes altså ganske godt af numerisk beregning.

Kapitel 6

Absorption af kvantebølger

Indtil videre har jeg udledt absorptionstværsnittet for lys ($m = 0$) og massive partikler ($m > 0$), de analytiske udregninger blev understøttet af numeriske beregninger, hvorfra også selve banekurverne for en indfaldende partikel/lysstråle kom frem. Næste skridt er at se kvantemekanisk på problemet, til dette skal bruges en helt anden formalisme samt en ny ligning, Klein-Gordon-ligningen. Denne fremkommer ved at lave den sædvanlige kvantemekaniske omskrivning $\hat{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$, men i stedet for at bruge det klassiske udtryk for energi, $E = p^2/2m$, bruges den relativistiske relation $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$, sammen med energioperatoren $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ fås:

$$E^2\Psi = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\hbar^2c^2\nabla^2\Psi + m^2c^4\Psi \quad (6.1)$$

Dette omskrives til:

$$(\square^2 + \mu^2)\Psi = 0 \quad \text{hvor} \quad \square^2\Psi \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi \quad \text{og} \quad \mu \equiv \frac{mc}{\hbar} = \frac{m}{\hbar} \quad (6.2)$$

\square^2 kaldes d'Alembert-operatoren og ∇^2 er Laplace-operatoren, der i sfæriske koordinater er givet ved:

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \quad (6.3)$$

d'Alembert-operatoren er altså blot en Laplace-operator med en ekstra tidsafledning og er derfor en generalisering til speciel relativitetsteori, der jo foregår i det flade Minkowski-rum. For videre generalisering til krumt rum (og specielt nærværende Schwarzschild-metrik) anvendes følgende metode (inspireret af Appendix A i [3]), metrikken skrives på to måder:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (6.4)$$

$$ds^2 = k^2 dt^2 + f^2 dr^2 + g^2 d\theta^2 + h^2 d\phi^2 \quad (6.5)$$

En infinitesimal forskydningsvektor i 4D-rumtid vil være givet ved $d\mathbf{l} = k dt\hat{\mathbf{t}} + f dr\hat{\mathbf{r}} + g d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + h d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, hvor $ds^2 = d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}$ med det sædvanlige kartesiske prikprodukt (dette er muligt da metrikken er diagonal). En generalisering af (A.16) i [3] til 4 koordinater giver da d'Alembert-operatoren som:

$$\square^2\Psi = \frac{1}{fghk} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{fgh}{k} \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{ghk}{f} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{fhk}{g} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{fgh}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right) \right] \quad (6.6)$$

Sammenlignes (6.4) og (6.5) fås:

$$f = i \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1/2} \quad g = ir \quad h = ir \sin \theta \quad k = \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{1/2} \quad fghk = -ir^2 \sin \theta \quad (6.7)$$

Disse udtryk indsættes i (6.6) for at få det ønskede resultat:

$$\begin{aligned} \square^2 \Psi &= \frac{i}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-i \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} r^2 \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(i \left(1 - \frac{R}{r}\right) r^2 \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(i \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} \Psi_{,tt} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) \Psi_{,r} \right) - \frac{(\sin \theta \cdot \Psi_{,\theta})_{,\theta}}{r^2 \sin \theta} - \frac{\Psi_{,\phi\phi}}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (6.8) \end{aligned}$$

Hvor notationen $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \equiv \Psi_{,tt}$ og lignende er indført fra kapitel 2 for at spare plads. Det er også muligt at udlede ovenstående fra det kovariante udtryk $\square^2 \Psi = g^{\mu\nu} \Psi_{;\mu\nu}$, hvor ; angiver den kovariant afledede, den her benyttede metode fandt jeg dog mere elegant (samt mere pladsbesparende).

Sammenlignes med (6.2) og (6.3) ses visse ligheder, vinkelledene er ens, men dette overrasker næppe da metrikkens vinkeldel er den samme som for en flad metrik i sfæriske koordinater, det interessante ses i de faktorer af $\left(1 - \frac{R}{r}\right)$ der er hoppet ind i leddene med t og r . Det er heller ikke så underligt at de indgår som de gør, metrikken har jo nogle ganske tilsvarende led. Dette er den ønskede form af d'Alembert-operatoren til brug i den generaliserede Klein-Gordon ligning.

Nu søges en ligning for radialdelen af Ψ , ved separation af variable antages at Ψ kan skrives som $\Psi(t, r, \theta, \phi) = T(t)\mathfrak{R}(r)Y(\theta, \phi)$, indsættes dette i (6.2) hvorefter der ganges igennem med $\frac{r^2}{T\mathfrak{R}Y}$ fås:

$$r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} \frac{T_{,tt}}{T} - \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) \mathfrak{R}_{,r} \right) + \mu^2 r^2 - \frac{1}{Y} \left[\frac{(\sin \theta \cdot Y_{,\theta})_{,\theta}}{\sin \theta} + \frac{Y_{,\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right] = 0 \quad (6.9)$$

Højresiden er konstant lig 0, ændres på r -koordinaten på venstresiden skal dette stadig gælde, men leddet med Y indeholder ikke r og må da være konstant, derfor må leddene med T og \mathfrak{R} også være konstante, samme argument kan bruges for en ændring af vinklerne θ og ϕ , dette er hjørnестenen i separation af variable, vælges den konstante værdi af de indbyrdes led til $l(l+1)$ fås for vinkeldelen:

$$-\frac{1}{Y} \left[\frac{(\sin \theta \cdot Y_{,\theta})_{,\theta}}{\sin \theta} + \frac{Y_{,\phi\phi}}{\sin^2 \theta} \right] = l(l+1) \quad (6.10)$$

Ved denne ligning kan igen laves separation af variable, hvorved en ny separationskonstant m^2 indføres (ikke massen, der jo alligevel er afskaffet til fordel for μ), løsningen er de sfæriske harmoniske funktioner, $Y(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi)$ (se [4]), hvilket ikke kommer som nogen overraskelse da problemet er sfærisk symmetrisk.

For \mathfrak{R}, T -delen af (6.9) fås med lidt omskrivning:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \left[\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right) \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - \mu^2 r^2 - l(l+1) \right] = 0 \quad (6.11)$$

Med samme argumentation som før, må disse to led hver for sig være konstante, værdien kaldes $-\tau^2$, for tidsleddet fås da:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\tau^2 \quad \Rightarrow \quad T(t) = A \cdot e^{i\tau t} + B \cdot e^{-i\tau t} \quad (6.12)$$

Dette udtryk minder om et der kendes fra kvantemekanik, med $A = 0$, $B = 1$ og $\tau = \varepsilon/\hbar$ ($\varepsilon = E + m$ er totalenergien, E den kinetiske energi), er dette tidsafhængigheden af en stationær løsning til Schrödinger-ligningen (her er m igen massen). Vælges omvendt $A = 1$ og $B = 0$ ville udtrykket kunne fortolkes som en partikel med negativ energi, hvilket betragtes som en antipartikel, dette vil jeg dog ikke komme nærmere ind på her, og fremover vil kun løsningen med $A = 0$, $B = 1$ blive benyttet, altså haves:

$$T(t) = e^{-i\varepsilon t/\hbar} \quad (6.13)$$

Nu ønskes radialligningen omskrevet så den ligner Schrödinger-ligningen og det effektive potential opnås. Indtil videre haves:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - \mu^2 r^2 - l(l+1) + r^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right)^{-1} \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} = 0 \quad (6.14)$$

For at komme videre antages at partiklen er urelativistisk for $r \gg R$, altså $E \ll m$ og $\varepsilon^2 \approx m^2 + 2mE$, indsat ovenfor fås (idet $\mu = m/\hbar$):

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - l(l+1) + r^2 \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \quad (6.15)$$

For at løse dette indføres funktionen $u = r\mathfrak{R}$, lad $f' \equiv \frac{df}{dr}$, dermed fås:

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dr} = \frac{u'r - u}{r^2} \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) = \frac{d}{dr} (u'r - u) = u''r + u' - u' = u''r \quad (6.16)$$

Indsat i (6.15) fås med lidt omrokering:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} u = Eu \quad (6.17)$$

Herfra kigges kun på s-bølger ($l = 0$), dels for at forsimple, dels fordi det ledende bidrag til tværsnittet kommer fra disse (se [5], der dog bruges en lidt anderledes fremgangsmåde), heraf fås let en løsning:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} u = -k^2 u \quad \Rightarrow \quad u(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (6.18)$$

Dette er en linearkombination af indkommende, e^{-ikr} , og udgående, e^{ikr} , sfæriske bølger, nøjagtig som man får det i kvantemekanisk spredningsteori. Da jeg her kun er interesseret i absorptionstværsnittet er der ingen grund til at bryde den sfæriske symmetri ved at lade den indkommende bølge være plan som man normalt gør i spredningsteori.

Nu til endnu en omskrivning af (6.14), uden de førnævnte antagelser (men stadig $l = 0$):

$$\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{R}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - \mu^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right) \mathfrak{R} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} \mathfrak{R} = 0 \quad (6.19)$$

For at finde noget der minder om en Schrödingerligning ganges igennem med $-\hbar^2/2m$, specielt fås for de to sidste led:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(-\mu^2 \left(1 - \frac{R}{r} \right) + \frac{m^2 + 2mE + E^2}{\hbar^2} \right) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{m^2}{\hbar^2} \frac{2GM}{r} - E - \frac{E^2}{2m} \quad (6.20)$$

Her er udtrykket for R skrevet ud eksplicit, dermed genkendes nemlig det Newtonske potential udenfor en sfærisk symmetrisk massefordeling, det er trods alt meget betrykkende at sådan et led dukker op. (6.19) bliver da til:

$$\frac{-\hbar^2}{2mr^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) - \frac{GMm}{r} \mathfrak{R} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{R}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right) = E \left(1 + \frac{E}{2m} \right) \mathfrak{R} \quad (6.21)$$

Indføres som før funktionen $u(r) = r\mathfrak{R}$ fås:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{GMm}{r} u + \frac{\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{R}{r} \frac{u - u'r}{r^2} = E \left(1 + \frac{E}{2m} \right) u \quad (6.22)$$

Tættere kommer vi nok ikke på en Schrödinger-ligning. Faktoren $\left(1 - \frac{R}{r} \right)^2$ på første led er egentlig blot en del af det effektive potential, parenteser kan ganges ud og et af de led man får er det sædvanlige $-\hbar^2 u''/2m$, resten hører til potentialet. Højresiden kan ikke direkte fortolkes som energien, med ved lave energier $E \ll m$ vil det være tilfældet.

Leddene med det Newtonske potential inspirerer til at undersøge løsninger der har form som hvad man finder for hydrogenatomet, hvori der også indgår et $1/r$ -potential. En sådan løsning har formen:

$$u(r) = \exp[i(kr + \eta \ln(kr))] \quad (6.23)$$

For store r er $kr \gg \ln(kr)$ og udtrykket beskriver en plan bølge, $u \propto e^{ikr}$, når logaritmen kan negligeres, energien er da $E = \hbar^2 k^2/2m$, η er en konstant der sammen med logaritmededdene tager højde for den øgede kinetiske energi der kommer af at bølgen falder ned i tyngdepotentialet. Ved indsættelse i (6.22) fås:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{R}{r} \right)^2 \left(- \left(k + \frac{\eta}{r} \right)^2 - \frac{i\eta}{r^2} \right) - \frac{GMm}{r} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(1 - \frac{R}{r} \right) \frac{R}{r} \frac{1 - i(kr + \eta)}{r^2} = E \quad (6.24)$$

Sammenlignes alle konstantled fås, ved antagelsen $E \ll m$:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} (-k^2) = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (6.25)$$

i overensstemmelse med diskussionen ovenfor. Ved store r , hvor ovenstående gælder, vil kun led af første orden i $1/r$ have betydning, sammenlignes disse haves:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{-2k\eta}{r} - \frac{2R}{r} (-k^2) \right) - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{GMm^2}{\hbar^2 k} + kR \quad (6.26)$$

Altså er (6.23) en passende løsning i den asymptotiske grænse $r \rightarrow \infty$, hvis η vælges til ovenstående. Udtrykket for $u(r)$ kan f.eks. findes i Sakurai [6], hvor man for spredning på coulombpotential $V(r) = -Z_1 Z_2 e^2/r$ finder en løsning med $\eta = Z_1 Z_2 e^2/\hbar v$. I dette tilfælde er omskrivningen $Z_1 Z_2 e^2 \rightarrow GMm$ passende, sammen med $v = p/m = \hbar k/m$ giver dette næsten ovenstående udtryk. Der er en relativistisk korrektion til bølgefunktionen givet ved kR . Ifølge [7] skulle dette give anledning til absorption, men matematikken er over mit niveau, så dette er jeg desværre ikke i stand til at eftervise. Dog er fundamentet lagt til den videre udregning.

Kapitel 7

Konklusion

På de foregående sider er blevet gennemgået en hel del omkring sorte huller. Nærmere bestemt er fænomenet absorption undersøgt, med henblik på at finde absorptionstværsnittet, der siger noget om hvor tæt man kan komme på et sort hul uden at blive en permanent del af det. Ved undersøgelse af tre forskellige typer indkommende objekter (massive partikler, lys samt en kvantemekanisk plan bølge) søgtes en forståelse for fænomenet.

I denne problemstilling kan man ikke komme uden om generel relativitetsteori, derfor indgik der i første kapitel en kort introduktion til de mest væsentlige begreber såsom metrik og geodætligninger. Sidstnævnte er et sæt koblede differentiaalligninger der beskriver bevægelsen af partikler i krumt rum, i denne omgang rummet omkring en sfærisk symmetrisk massefordeling, hvis krumning er givet ved Schwarzschildmetrikken (2.2). Af disse ligninger fås umiddelbart tre vigtige resultater: at et kredsløb holder sig i et plan, samt at der er to bevarede størrelser kaldet e og ℓ , der kan fortolkes som bevarelse af energi og impulsmoment.

Næste punkt var beskrivelsen af den generelle fremgangsmetode. I de tre separate tilfælde der blev kigget på skulle man gøre mere eller mindre samme. For lys og massive partikler kunne metrikken skrives om til en klassisk-lignende ligning der kunne fortolkes som 1-dimensionel bevægelse i et effektivt potential. Så snart sådan et udtryk er opnået kan man bruge metoder som hvis problemet havde været rent klassisk: Der er en potentialbarriere der skal overvindes, hvor meget energi skal der til? For den kvantemekaniske bølge skal gøres noget tilsvarende, dog ender man med en modificeret Schrödinger-ligning, ligeledes med et effektivt potential.

Efter introduktionen tog jeg fat på lyset. En ganske elementær udregning viste at de bevarede størrelser e og ℓ (der for lys ikke har noget med energi og impulsmoment at gøre) er relateret til stødparameteren h ved $h = |\ell/e|$. En næsten ligeså ligetil udregning gav at lyset ville blive absorberet hvis $h \leq \sqrt{27}R/2$, hvilket giver absorptionstværsnittet for lys til $\sigma_{\text{lys}} \equiv \pi h^2 = 27\pi R^2/4$, R angiver Schwarzschildradius af det sorte hul. I den forbindelse fandtes også at der er muligt for lys at gå i cirkulært kredsløb omkring et sort hul, dette vil netop ske hvis stødparameteren er eksakt lig $\sqrt{27}R/2$, radius af kredsløbet vil da være $3R/2$.

Med nøjagtig samme fremgangsmåde som for lys blev massive partikler herefter behandlet. Der ligger en ganske lille forskel i udregningerne idet normaliseringen af 4-hastigheden for massive partikler er anderledes end for lys, dette leder til væsentlige forskelle i resultatet. Et interessant sidespring herfra er den ikke-relativistiske grænse af det fremkomne effektive potential. Det viser sig nemlig at man kan opnå en ligning der minder ganske meget om en klassisk analog fundet fra Newtons tyngdelov, denne indeholder en relativistisk korrektion til centrifugalleddet, resultatet er en mindre frastødning fra centrifugalbarrieren end man ville have klassisk. Det er netop denne korrektion der (i det fuldt relativistiske udtryk) ligger til grund absorptionen, klassisk vil man jo ikke kunne blive indfanget i et potential der går som

$1/r$, som tyngdekraften jo gør.

Herefter skulle det blot en mindre mængde algebra til for at finde det ønskede resultat, givet ved (4.16). Indenfor en faktor 3 er tværsnittet proportionalt med v^{-2} , hvor v angiver starthastigheden i uendelig afstand. Den urelativistiske grænse $v \ll 1$ viste sig at være $\sigma = 4\pi R^2/v^2$. I den anden ende fandtes et resultat der var ganske uventet. Foruden ikke at give tværsnittet for lys, som man måske kunne forvente, viste det sig at det gyldne snit dukker op. Hvor man for lys finder at der er mulighed for cirkulært kredsløb ved $r = 3R/2$, er det for ultrarelativistiske partikler muligt ved $r = \varphi R$, hvor $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\dots$ er det gyldne forhold. Hvorvidt man skal lægge nogen større betydning i dette vil jeg ikke komme ind på, men det er da ganske sjovt.

Så skulle der kigges lidt nærmere på kredsløbene og hvordan indfangningen/absorptionen foregår. Til dette skal der numeriske løsninger i brug, hvilket kapitel 5 handlede om. Der skal her ikke siges så meget andet end at geodætningerne fra introduktionsafsnittet blev løst vha. et Matlab-program skrevet til lejligheden. Efter opsættelse af start-/grænsebetingelser, alt efter hvad man præcist er ude efter, var det bare med at holde styr på syntaksen i de lange formler. Programmet kan bruges til lidt af hvert, men det interessante er selvfølgelig at eftervise de analytisk fremkomne udtryk, dette var ikke noget problem som det ses på figur 4.2. Det er også nært at vise forskellen mellem absorption og spredning som figur 5.1a viser. Dertil kan sammenlignes banekurver for lys og massive partikler samt andre former for mulige kredsløb.

Sidste punkt var den kvantemekaniske plane bølge, her var metrikken ikke længere nok. Da der skal kvantemekanik ind i billedet skal også bruges en passende operator, den her relevante er d'Alembert-operatoren der bl.a. kendes fra elektrodynamik. Pga. den krumme rumtid skulle først udledes et udtryk for operatorens form i Schwarzschild-metrikken, efter dette var gjort kunne omskrivningen til en Schrödingerligning begynde. Af separation af variable samt antagelsen at der måtte findes en stationær løsning kom jeg frem til en sådan ligning. Fra inspiration af løsningen til hydrogenatomet fandtes en relativistisk korrektion til den asymptotiske bølgefunktion. Herefter kunne jeg ikke komme videre, bortset fra at referere til en artikel hvor en lignende fremgangsmåde føres videre og et absorptionstværsnit opnås. Dette lå over mit niveau, så det er en lidt trist slutning på projektet, men sådan kan det gå.

Bilag A

Programmer

orbit_plot.m

Hovedprogrammet der samler alle rutiner og returnerer de ønskede resultater

```
1  clc; clf; clear; hold on
2  x0=-1e6; %Startposition x0, y0 bestemmes senere
3  vx0=[.5]; vy0=0; %Starthastighed (vx0,vy0)
4  R=1; %Schwarzschildradius af det sorte hul
5  tid=[0 6e8]; %Tiden der som udgangspunkt integreres i
6  y0=zeros(size(vx0)); %Initialisering af y0-vektoren
7  r_stabil=y0; %Det semistabile kredsløb radius gemmes heri
8  E=vx0.^2/2; %Start-"energier"
9  X=108*E.^2+36*E-1;
10 b=sqrt((X+sqrt(X.^2+128*E))./(16*E));
11 gaet=b*R./vx0*.9; %Et gæt på den forventede værdi, gør den numeriske løsning lidt hurtigere
12 for m=1:length(vx0)
13     y0(m)=findmin(x0,vx0(m),vy0,R,tid,gaet(m)); %Her findes den kritiske stødparameter
14     [s,p]=num_loesning(x0,y0(m),vx0(m),vy0,R,tid); %Løser igen med den fundne stødparameter
15     r=p(:,2); i=find(r<20);
16     tid2=[0 linspace(s(i(1)),s(i(end)),1000)]; %Nu med lidt bedre dataopløsning til plottet
17     [s,p,se,e,L(m)]=num_loesning(x0,y0(m),vx0(m),vy0,R,tid2);
18     r2=p(:,2); phi2=p(:,3);
19     h=polar(phi2,r2); set(h,'Linewidth',2); %Plotter banekurven
20     l(m)=find(abs(p(:,5))==min(abs(p(:,5))))); %Finder indeks i for dr/ds~=0
21     r_stabil(m)=r2(l(m)); %Bud på radius i det semistabile omløb
22 end
23 resultat=[[vx0(:) y0(:) gaet(:) r_stabil(:)]]
24 theta=linspace(0,2*pi); %Herfra og frem plottes det sorte hul og akserne fastsættes
25 X=R*cos(theta); Y=R*sin(theta);
26 fill(X,Y,'k')
27 axis equal
28 axis([-5 5 -5 5])
```

num_loesning.m

Programmet der løser ligningerne numerisk:

```

1 function [s,p,se,e,l]=num_loesning(x0,y0,vx0,vy0,R,tid)
2 r0=sqrt(x0^2+y0^2); %startafstand fra origo
3 phi0=angle(x0+1i*y0); %startvinkel fra x-akse
4 l=x0*vy0-y0*vx0; %bevaret "impulsmoment"
5 ur0=vx0*cos(phi0)+vy0*sin(phi0); %start radial-"hastighed"
6 uphi0=l/r0^2; %start vinkel-"hastighed"
7 e=sqrt((1+l^2/r0^2)*(1-R/r0)+ur0^2); %bevaret "energi"
8 if sqrt(vx0^2+vy0^2)>=1; %For lys, vx0=1, er formlen lidt anderledes
9     e=sqrt(1^2/r0^2*(1-R/r0)+ur0^2);
10 end
11 ut0=e/(1-R/r0); %start tids-"hastighed"
12 start=[0 r0 phi0 ut0 ur0 uphi0]; %startbetingelser samlet
13 options=odeset('RelTol',1e-13,'events',@events); %sætter tolerance og events
14 [s p se pe ie]=ode45(@diffflign,tid,start,options,R,e,l); %selve løsningen udregnes
15
16 function dpds=diffflign(s,p,R,e,l) %differentialligningssystemet
17 dpds=[p(4);p(5);p(6);
18     -R./(p(2)-R).^2.*e.*p(5);
19     R/2./p(2).^2./(1-R./p(2)).*(p(5).^2-e^2)+(1-R./p(2)).*1^2./p(2).^3;
20     -2./p(2).^3*1*p(5)];
21
22 function [vaerdi,stop,retning]=events(s,p,R,E,J) %nogle relevante events i udregningen
23 %stopper integration hvis r<1.01R (begivenhedshorisonten):
24 vaerdi(1)=p(2)-1.001*R; stop(1)=true; retning(1)=-1;
25 %stopper integration hvis r>10R, ingen grund til at fortsætte:
26 vaerdi(2)=p(2)-10*R; stop(2)=true; retning(2)=+1;
27 %Gemmer når radius er semistabil, dr/ds=p(5) går fra >0 til <0:
28 vaerdi(3)=p(5); stop(3)=false; retning(3)=1;

```

findmin.m

Programmet finder nulpunkt for $u_{\text{slut}}^r(y_0)$, og giver den stødparameter y_0 der sikre asymptotisk cirkulært kredsløb.

```

1 function y0=findmin(x0,vx0,vy0,R,tid,gaet)
2 options=optimset(@fzero);
3 y0=fzero(@(y0) f(x0,y0,vx0,vy0,R,tid),gaet,options);
4
5 function drds=f(x0,y0,vx0,vy0,R,tid)
6 [s,p]=num_loesning(x0,y0,vx0,vy0,R,tid);
7 drds=p(end,5);

```

Litteratur

- [1] James B. Hartle: *Gravity: An Introduction To Einsteins General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [2] W. G. Unruh: *Absorption Cross Section Of Small Black Holes*. Phys. Rev. D, **14**, 12 (1976).
- [3] David J. Griffiths: *Introduction To Electrodynamics*. Prentice Hall, 3. udgave, 1999.
- [4] David J. Griffiths: *Introduction To Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 2. udgave, 2005.
- [5] L. Z. Fang et. al.: *Absorption Cross Sections Of A Schwarzschild Black Hole*. Class. Quantum Grav. **1** (1984) 403-405.
- [6] J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Longman, Revised Edition, 1994.
- [7] Norma Sánchez: *Wave Scattering Theory And The Absorption Problem For A Black Hole*. Phys. Rev. D, **16**, 4 (1977).