

Studieretningsprojekter i Speciel Relativitetsteori

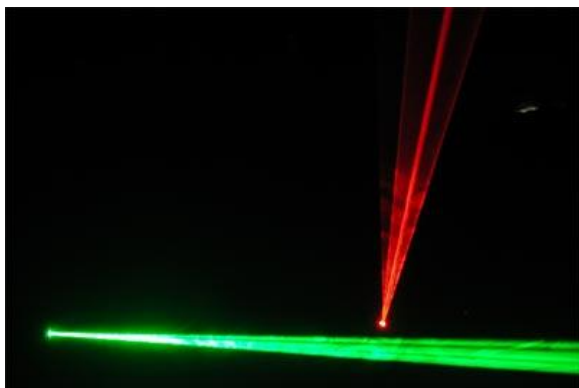


Indhold:

Øvelse 1: Måling af lysets hastighed med roterende spejl,	s. 3
Øvelse 2: Myonens levetid,	s. 6
Øvelse 3: Måling af lysets hastighed med pulseret laser,	s. 11
Øvelse 4: Elektronens relativistiske masse (ikke i 2010),	s. 13

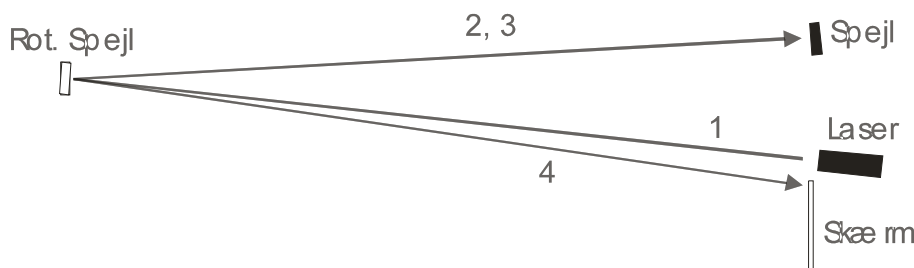
Øvelse 1: Måling af lysets hastighed

Det er en af de to hjørnesteen i den specielle relativitetsteori at lysets fart, c , er konstant og endelig for alle observatører. En af årsagerne til at de relativistiske effekter ikke griber afgørende ind i vores dagligdag er at lysets fart dog er uhyre høj. Dette gør også målingen af c til et lidt krævende eksperiment.



Dette eksperiment har rødder fra årene 1850-1878 hvor Foucault og derefter Michelson bestemte lysets fart ved lignende metoder. Princippet er ganske simpelt: Man sender lys fra en laser (1) mod et roterende spejl hvorfra det sendes videre (2) til et andet spejl der kaster lyset tilbage (3). På grund af lysets udbredelsesfart tager det et vist tidsrum for det

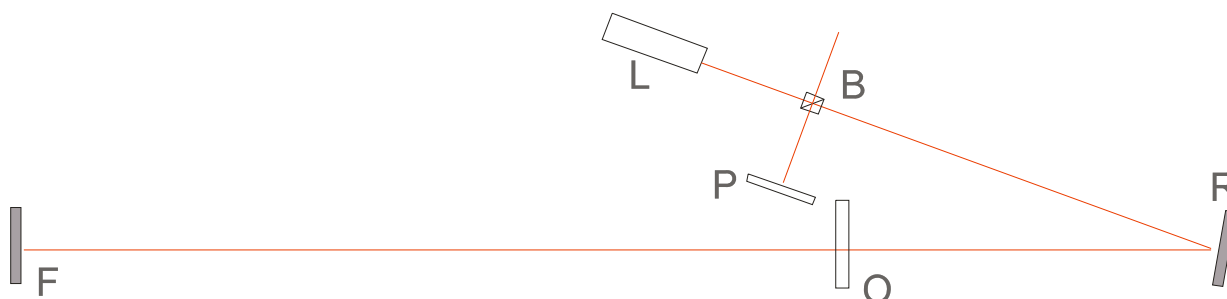
at vende tilbage til det roterende spejl. I dette tidsrum har spejlet roteret en (lille) vinkel hvorfor lyset ikke længere returneres (4) til den oprindelige kilde, men til en skærm hvorpå forskydningen kan registreres. Kender man rotationshastigheden for det roterende spejl og afstandene kan lysets



fart bestemmes. En skitse af den principielle opstilling er vist i figuren.

Der er imidlertid nogle

tekniske detaljer der komplicerer eksperimentet lidt, men som på den anden side gør at man kan måle lysets fart temmelig præcist. Den ønskede opstilling er vist i figur 2. Her illustreres laseren L , en beam-splitter, B , det roterende spejl, R , en optisk linse, O , det faste spejl, F og den positionsfølsomme lysdetektor, P . Afstanden mellem L og B kaldes i det følgende d_{LB} og så fremdeles. Brændvidden på den optiske linse er 5000 mm. For at opnå et rimeligt kompromis mellem lysmængden og flytningen af laserpletten på P kan det vises at afstandene skal være: $d_{LR} = 5.00$ m, $d_{RO} = 5.00$ m, $d_{OF} = 10.00$ m, hvorimod afstanden d_{LB} stort set er underordnet, men kan vælges til f.eks. 0.5 m (og $d_{PB} = d_{LB}$).



Fremgangsmåden under opstillingen og opliniering af linser og spejle er at begynde fra laseren og følge lyspletten til det roterende spejl, derfra til linsen og videre til det faste spejl. Fokuser laseren på det roterende spejl vha. den lille 'skruetrækker med hul'. Det roterende spejl i 'boremaskinen' kan indstilles manuelt vha. den lille stilleskrue, der hænger i en kæde derved. Husk at tage stilleskruen ud umiddelbart efter brug, hver gang! Spejle og linsen stilles således at lyspletten rammer/passerer nogenlunde på/igennem centrum.

Herefter indstilles det faste spejl således at den reflekterede stråle (3) løber tilbage langs den indkommende (2). Et stykke hvidt karton (til observation af (3)) med et lille hul i (til passage af (2)) er her ret nyttigt. Det er her i eksperimentalfysik som i teoretisk fysik – det kræver for de fleste en del held (og gerne talent) at gøre det helt rigtigt første gang! Så bliv ikke overrasket hvis dette punkt kræver en ihærdig indsats, begynd tæt ved det faste spejl og bevæg jer derefter ned mod linsen og derefter videre til det roterende spejl. To pletter ((1) og (3)) på det roterende spejl er i mange tilfælde nok til at udføre forsøget, men for at være sikker kan pletten følges tilbage til laseren hvor (4) bør dække (1) så længe det roterende spejl står stille. Herefter indsættes beamsplitteren så (1) delvist sendes væk fra P, altså så (4) delvist sendes hen mod skærmen. I bør nu kunne se en klar plet på et stykke hvidt papir indsat foran P. Verificer at det er en del af den reflekterede stråle ved f.eks. at sætte hånden ind i (2).

Check en ekstra gang at stilleskruen ikke er glemt isat det roterende spejl. Nu kan ledningerne fra 'boremaskinen' sættes i variotransformereren, der basalt set bare er en vekselspændingskilde med variabel styrke. Sæt aldrig spændingen højere end 240 V!

For at finde spejlets rotationsfrekvens, ν , eller rettere lyspulsernes frekvens som er den dobbelte (hvorfor mon?) stilles en fotodiode udenfor den benyttede strålegang. Roter spejlet indtil lyset rammer fotodioden i midten. Nu kan fotodioden forbindes til et digitalt oscilloskop på PC'en og der indstilles på ca. 1ms, 5.00 mV, *trigger*: normal, DC, rising – pulsen ligner lidt en savtak-puls med



en stejl flanke. Frekvensen kan nu måles. Ved omkring det maksimale 240 V fås en puls-frekvens på ca. 1 kHz.

Plettens (4) flytning på skærmen kan enten afmærkes med blyant som funktion af rotationsfrekvensen eller man kan fotografere pletten i forhold til et fast referencepunkt. Begge dele gøres lettest i mørke! En lineær regression af data-punkterne (hvor forskydningen ved frekvens 0 med rimelighed kan tvinges til at være 0) giver lysets fart ud fra

$$c = 2 d_{FR} 2\pi\nu 2 d_{OR}/s = 24\pi\nu d_{OR}^2/s$$

hvor ν er rotationsfrekvensen og s er flytningen af laserpletten på skærmen, P . Dette resultat fremkommer idet spejlet roterer vinklen φ mens lyset tilbagelægger afstanden $2 d_{FR}$ i tiden $t = \varphi/2\pi\nu$ og flytningen $s = 2d_{OR}\varphi$ og det er benyttet at $d_{FR} = 3d_{OR}$. Hvis s afbildes som funktion af ν



fås c derfor fra hældningen ud fra $c = 24\pi d_{OR}^2/\alpha$, hvor α er hældningskoefficienten.

Kig ikke ind i laseren! Den er ikke farlig (1 mW i øjet er den acceptable grænse), men alle steder i den eksperimentelle fysik der har med stråling at gøre gælder ALARA: As Little/low As Reasonably Achievable.

Øvelse 2: Myonens levetid

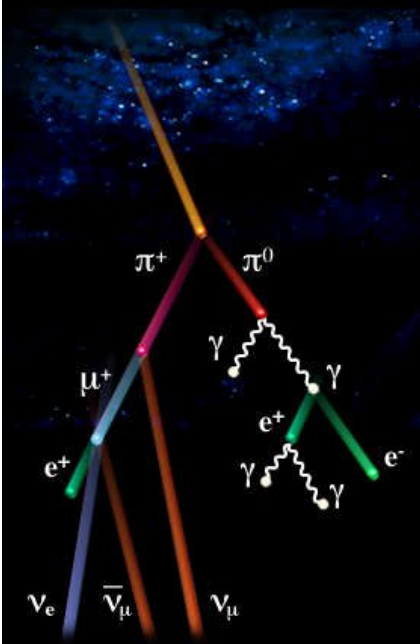
Det er en almindelig opfattelse at rigtigheden af relativitetsteorien nødvendigvis er vanskelig at eftervise eksperimentelt. Det er den faktisk ikke. Et lille eksperiment (og, det må indrømmes, en



tillid til et par udsagn om levetid og sammensætning af den kosmiske stråling) kan let eftervise at Einstein havde ret i ihvertfald to ting: Et ur i bevægelse går langsomt og dets udstrækning formindskes.

En myon er en tung udgave af en elektron – den har samme ladning, men vejer ca. 207 gange mere og den er derfor radiaktivt ustabil, dvs. den henfalder til en elektron (og nogle flere, i denne forbindelse irrelevante, partikler kaldet neutrinoer, ν). Dens levetid i hvile er 2.2 mikrosekunder (μs). Denne slags partikler bliver dannet i relativt store højder i Jordens atmosfære, omkring 10 km oppe. De bliver dannet med så høj energi at de bevæger sig med en fart meget nær lysets, dvs. ca.

300.000 km/s eller 0.3 km/ μs . Hvis deres levetid *i bevægelse* var identisk med deres levetid *i hvile* ville de således nå knapt en kilometer fra produktionsstedet, dvs. de ville aldrig nå frem til en tæller placeret ved jordoverfladen. Med en almindelig Geiger-tæller kan man høre kliklyde forårsaget af ladede partikler, dels fra omgivelsernes radioaktivitet, dels fra den kosmiske stråling. Cirka 25% af disse klik stammer fra kosmisk stråling, hovedsageligt fra myoner der løber gennem tælleren. Alternativt kan man afbilde myonens spor i et gnistkammer som vist på figuren. Hvordan kan det lade sig gøre at observere myoner når de er produceret i en højde af 10 km (se figuren)? Det kan det fordi myonen bliver relativistisk, dvs. dens bevægelsesenergi, E_{kin} , overstiger 'hvilemassens energi' beregnet ud fra $E=mc^2$. Når det sker, forøges dens levetid med ca. samme faktor som E_{kin}/mc^2 fordi den bevæger sig i forhold til os. Den kan altså kun sige klik i vores tæller hvis det er rigtigt at et ur i bevægelse går langsomt. Nå, siger skeptikeren, hvad så hvis jeg rider på ryggen af myonen? Så ligger den jo stille i forhold til mig og må derfor have sin normale levetid på 2.2 μs Ja, det er helt rigtigt og forklaringen er den, at ikke bare ændrer tidens gang sig for ting i bevægelse, rummets udstrækning ændres også. Således synes afstanden til Jorden for myonen at være forkortet med samme faktor som tiden før blev forlænget med og den kan igen nå ned til jordoverfladen. I den ekstreme grænse hvor bevægelsen foregår med lysets fart, som den naturligvis gør for fotoner (lyspartikler), er afstanden set for fotonen således nul (!) og man kan sige at vi – igen set fra fotonens synspunkt – henter fotonen fra Solens overflade med øjet når vi kigger derop.

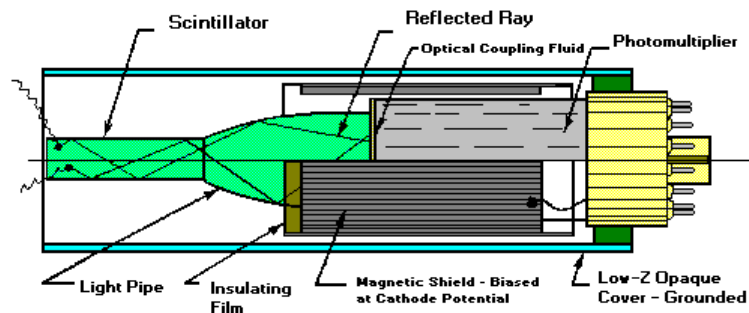


De oprindelige partikler i den kosmiske stråling, som kan være protoner, fotoner eller store atomkerner, kan stamme fra Solen, Mælkevejen, vores egen galaksehob eller sågar fra endnu fjernere egne af Universet. Når en sådan energirig partikel rammer et atom i den øverste del af Jordens atmosfære 'smadres' atomet og dets kerne i mange dele. De derved dannede partikler, som ligeledes er energirige, kan ramme atomer længere nede i atmosfæren og denne lavine-proces kan fortsætte indtil

jordoverfladen er nået. Ved at måle antallet i og udstrækningen af partikelbygen kan man f.eks. udlede hvad energien af den oprindelige partikel var.

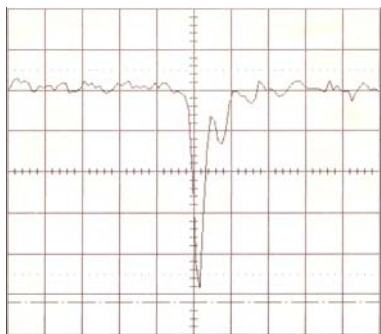
Denne kosmiske stråling blev opdaget i begyndelsen af de tyvende århundrede og udgør som nævnt ca. 25 % af den naturlige baggrundsstråling. I en kosmisk byge (se figuren) kan indgå adskillige usædvanlige partikler som f.eks. myoner (μ^+ , μ^-), pioner (π^+ , π^- , π^0) og positroner (e^+). Opdagelsen af den første antipartikel, positronen, i 1932 var i den kosmiske stråling.

Denne øvelse er baseret på brugen af et såkaldt scintillerende materiale, en scintillator. Der findes mange forskellige typer scintillerende materialer, organiske forbindelser (f.eks. polystyren) såvel som



uorganiske (natriumiodid, NaI – gammataælleren i kernereaktionsøvelsen) og både flydende og faste ved almindeligt tryk og temperatur. Fælles for dem alle er at de afgiver lys ved passagen af en ladet partikel, kort sagt fordi den passerende ladning eksiterer atomer i stoffet der efter kort tid henfalder under udsendelse af lys. Dette lys transporteres videre i en lysleder. Idet lysmængden er relativt lille (typisk ca. 20.000 fotoner pr. cm) skal den forstærkes kraftigt hvilket finder sted i en fotomultiplikator (Photo-Multiplier-Tube, PMT). I fotomultiplikatoren benyttes den foto-elektriske effekt til at lade lys udsende elektroner. Disse elektroner accelereres gennem et spændingsfald og rammer derefter en plade hvor hver elektron afgiver mindst to sekundære elektroner. Denne proces fortsættes gennem ca. 10-12 trin hvorefter de få elektroner har udviklet sig til en elektron-lavine der kan detekteres som en elektrisk puls. Fordelingen af spændingsfald mellem de mange plader styres af den såkaldte base. Generelt kalder man hele sammensætningen af scintillator, lysleder, foto-

multiplikator og base for en scintillator-tæller. En typisk puls fra en scintillator-tæller er vist i

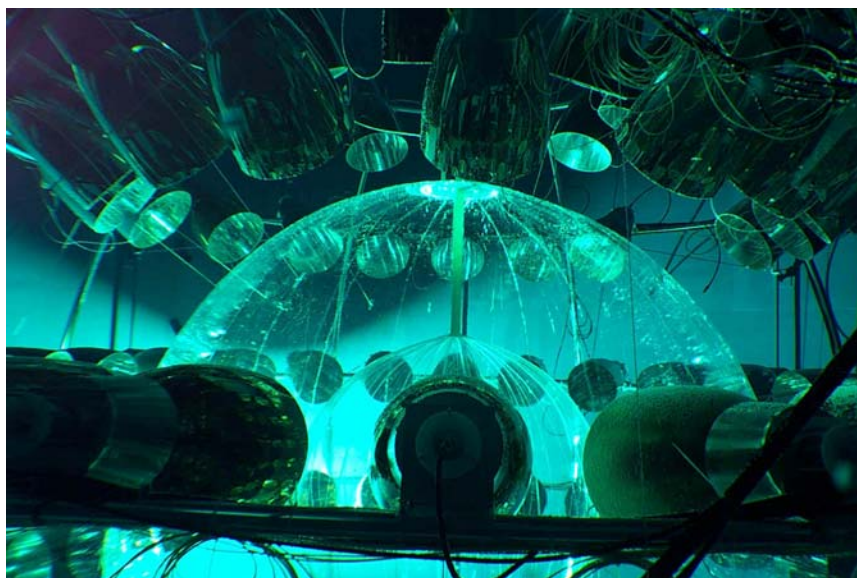


figuren her (tidsinddeling 10 ns). Det ses at den første flanke (rise-time) er meget stejl, typisk få nanosekunder (ns). Med forskellige tricks kan det lade sig gøre at få tidsopløsning af gennemtrængende partikler ned på ca. 0.1 ns, hvilket ikke er nødvendigt her. Idet foto-multiplikatoren selvsagt er meget lysfølsom må der ikke slippe lys ind fra omgivelserne. Derfor

pakkes scintillator og lysleder ind i reflekterende folie og dernæst i mørk plast og tape der forbindes tæt ved overgangen til foto-multiplikatoren.

Første del af øvelsen går ud på at samle en funktionsdygtig scintillator-tæller fra dens bestanddele. Har man først gjort det en gang, ved man at man kan gøre det igen (og at der ikke er ret meget der kan gå i stykker).

Inden der sættes (negativ) højspænding til tælleren bør den dækkes med et sort klæde for at afskærme evt. huller der kan give 'falsk' lys.

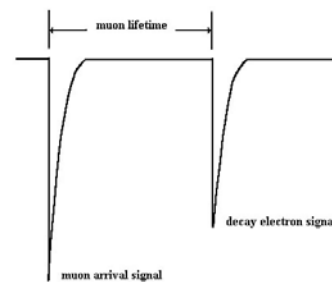


En typisk PMT kan tåle -2 kV og begynder multiplikation allerede ved -1.6 kV. En god tommelfingerregel er at forstærkningen fordobles for hver 40 Volt spændingen øges.

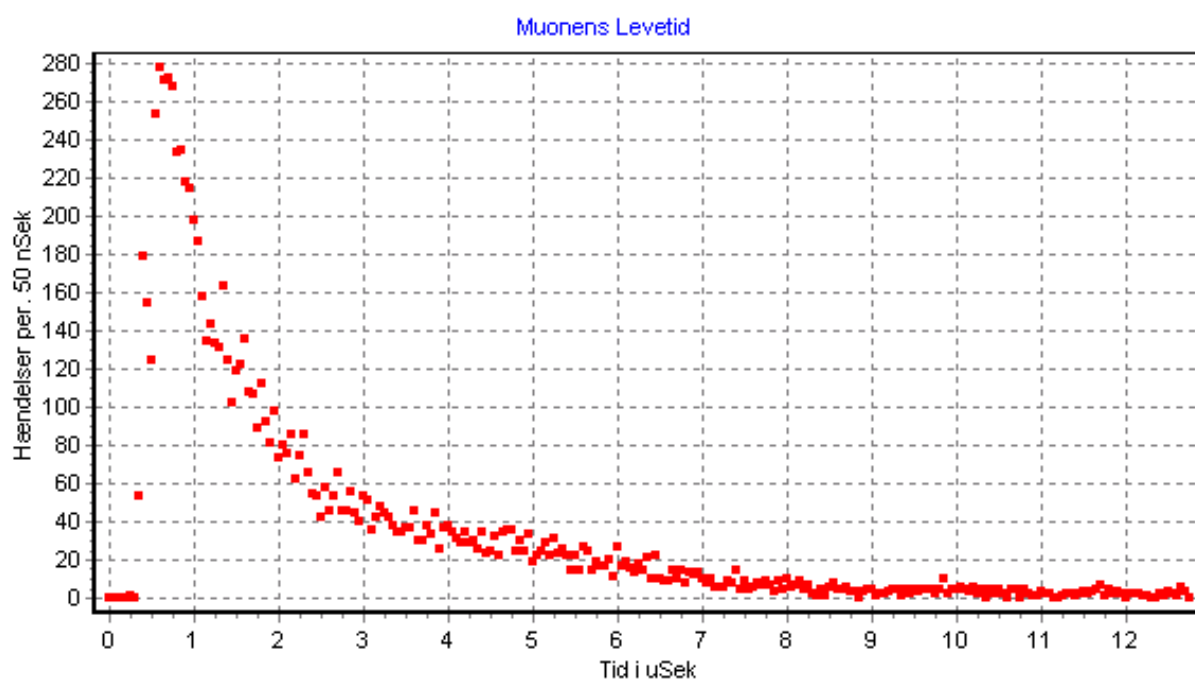
Forbind udgangen af basen til et oscilloskop der sættes til at trigge på den negative flanke (baserne giver meget tit et negativt signal, her alle, men det gælder ikke generelt) med 20 mV skala, tidskonstant 20 ns og trigger normal.

Udover forbindelsen til højspænding (HV) har de fleste baser en indgang der benævnes -800 V. Denne indgang benyttes som ekstra forsyning ved høje tællerater, dvs. ca. 1 mio. pr. sekund eller så. Idet vi forventer i størrelsesordenen 1 pr. sekund er der ingen grund til at benytte -800 V.

Anden del af øvelsen går ud på at måle myonens levetid i hvile. Til dette benyttes en tyk scintillator med et relativt stort areal. Idet myonen løsriver eller eksiterer elektroner langs sin bane i scintillatoren hvorunder der udsendes lys, vil den tabe energi. I nogle tilfælde taber den så meget energi at den standses i scintillatoren.

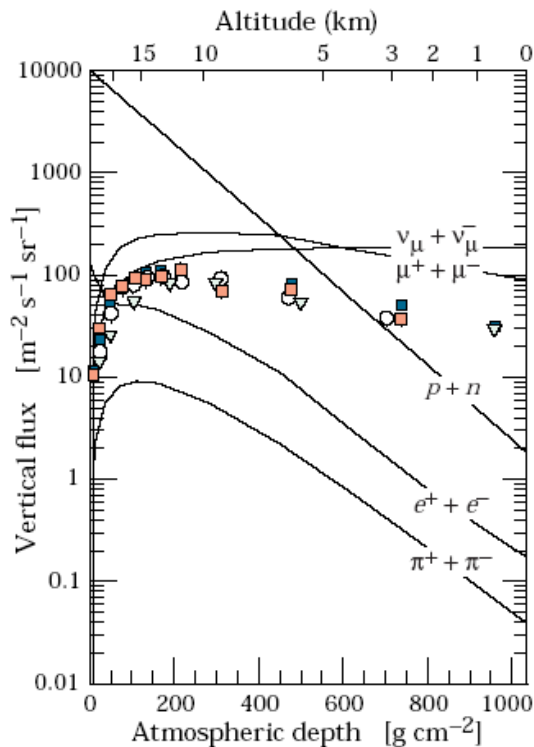


Der vil derfor komme to pulser tæt forfulgt af hinanden: Den første i det øjeblik myonen gennemtrænger scintillatoren og bringes til standsning og den anden når myonen henfalder til en elektron der også giver anledning til lysudsendelse i scintillatoren. Disse to pulser vil være separeret med den pågældende myons levetid i hvile.

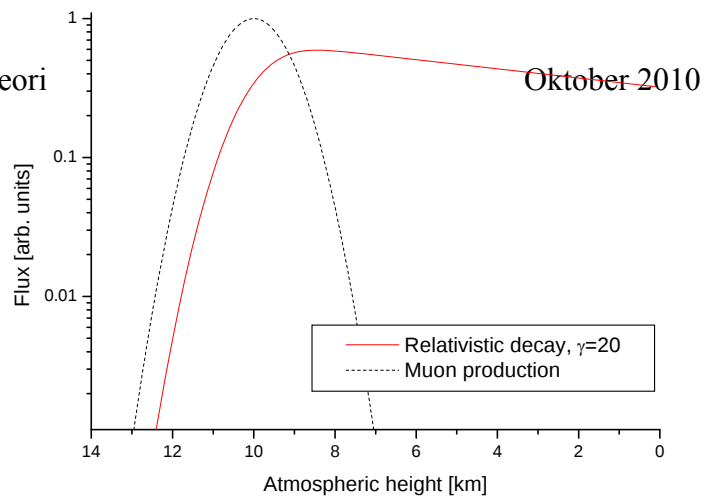


Et typisk måleresultat (taget over 4 dage) ser ud som vist i figuren herover.

Myonen har selvsagt 'forbrugt' af sin levetid når den rammer scintillatoren, men det vigtige er *formen* af henfaldskurven – at påbegynde målingen senere svarer simpelthen til blot at have et mindre antal myoner at tælle henfaldet af.



steori



Det sidste trin i overbevisningen er et kvalitativt argument for at myonerne faktisk produceres i 10 km højde. I figuren herover til venstre er vist det observerede antal partikler (pr. areal, tid og retning),

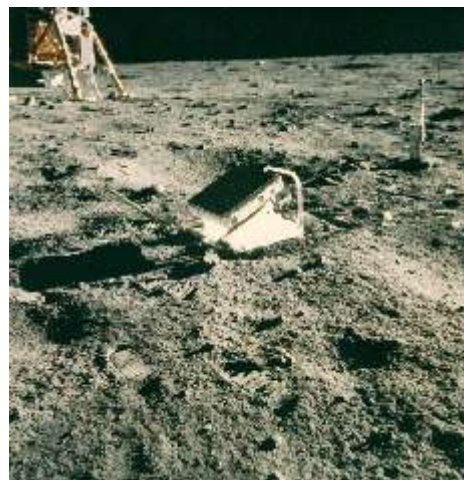
bla. myoner (μ⁺+μ⁻), som funktion af den atmosfæriske dybde, omsat på den øverste skala til højde.

Læg mærke til den logaritmiske y-skala.

Som et kvalificeret gæt kan vi antage, at myonerne produceres normalfordelt omkring højden 10 km, med en varians på 0.8 km (den prikkede kurve i figuren herover, til højre). Endvidere antager vi for at lette beregningen at de alle produceres med en Lorentz faktor på γ=20 og at de henfalder i overensstemmelse med tidsforlængelsen baseret på denne værdi af γ. Resultatet er vist i figuren som den røde, fuldt optrukne linie, og en sammenligning med forrige figur peger kraftigt i retning af, at fortolkningen med de ca. 10 km er korrekt.

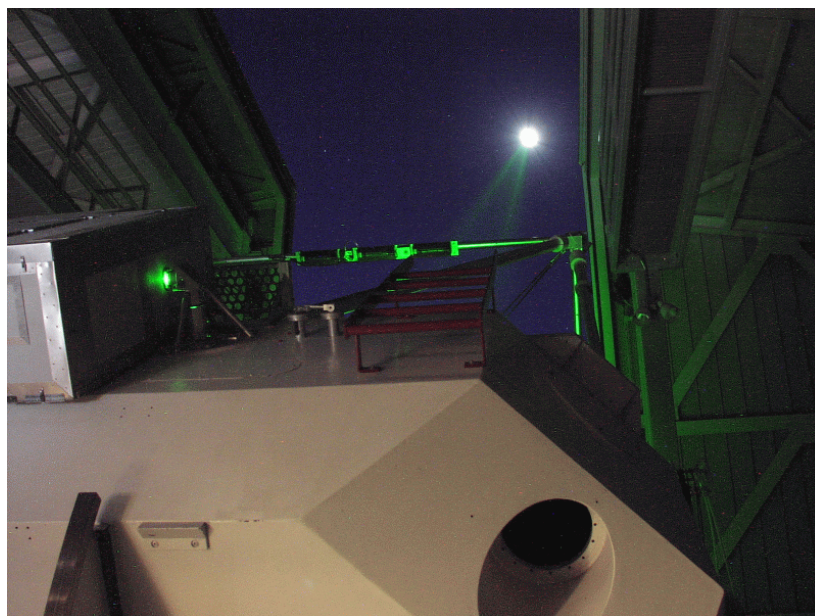
Øvelse 3: Lysets hastighed med pulseret laser

En af de ting Apollo-astronauterne bragte med til Månen var et specielt konstrueret spejl, en såkaldt Lunar Retroreflector. Denne type spejl kaster lys tilbage i den retning det kom fra. Ved at sende en kort laser-puls fra Jorden mod Månen, kan man ved at måle tidsforsinkelsen mellem afsendelse af pulsen og modtagelse af refleksionen, afgøre hvad afstanden til Månen er ved at bruge lysets hastighed. Heraf har man udledt, at afstanden til Månen tiltager med ca. 4 cm om året (ud af 385.000 km), bl.a. som følge af tidevand på Jorden. En anden konklusion er at Månen sandsynligvis har en flydende kerne.



Og så er der Einsteins generelle relativitetsteori. Ifølge det såkaldte ækvivalensprincip falder alle objekter – uafhængigt af deres masse og sammensætning – på samme måde, dvs. med samme acceleration, i et tyngdefelt. En af de bedste afprøvninger af dette princip stammer fra en sammenligning af hvordan hhv. Jorden og Månen falder i Solens tyngdefelt.

Laser-pulsen der rettes mod Månen er ca. 3 meter i diameter når den forlader laseren, men den



udbredes bl.a. gennem vekselvirkning med Jordens atmosfære. Desuden har strålen en vinkelfordeling ('divergens') der gør at pletten på Månen er omkring 3 kilometer i diameter. Den returnerende 'plet' bliver ligeledes større, så den i gennemsnit er 20 km på Jorden. Og sandsynligheden for at få en foton tilbage er så lille, at selvom der sendes 300,000,000,000,000,000 fotoner af

sted pr. puls, er det ikke hver gang man kan måle en returneret foton.

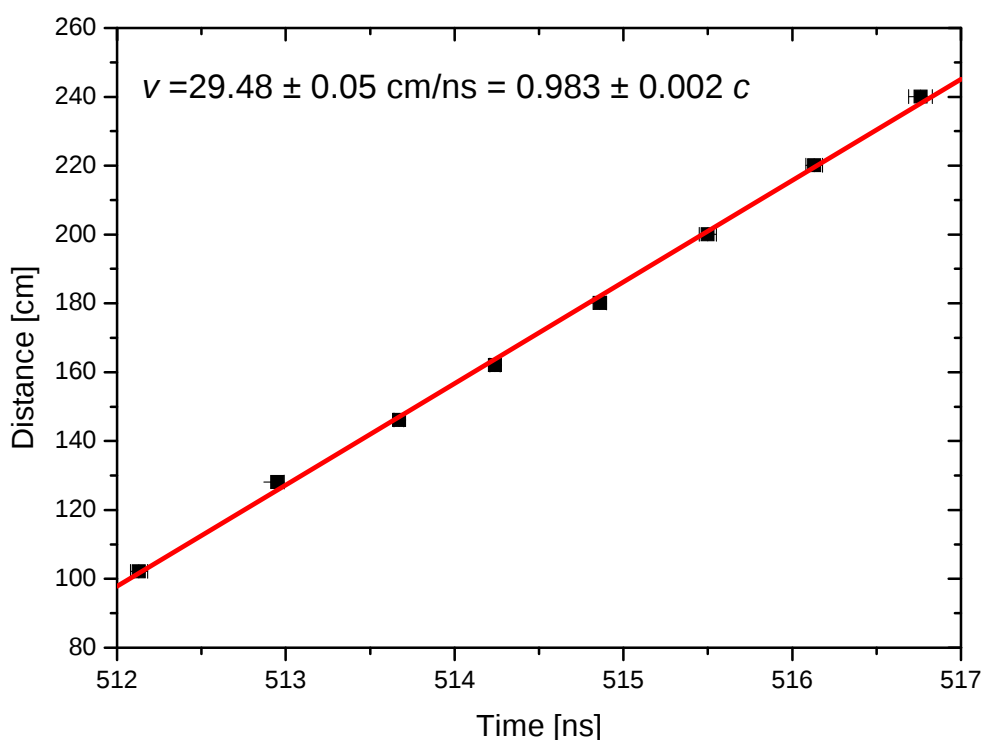
I denne øvelse skal en lignende måling udføres, men på en måde 'omvendt': Vi benytter en måling af tiden mellem afsendelse og modtagelse, samt en præcis måling af afstanden fra laser til detektor, til at finde lysets hastighed.

Stil laseren, fotodioden og det dobbelte spejl op så de danner en firkant. Udlæs udgangspulsen på laseren i oscilloskopets kanal 1, og udgangspulsen fra foto-dioden i oscilloskopets kanal 2. Indstil tids-inddelingen til få nanosekunder, og regulér spændingsinddelingen indtil udgangspulsen tydeligt kan ses. Finindstil opstillingen, især spejlene, indtil et signal kan ses på kanal 2 (evt. justeres spændingsinddelingen). Dette signal kan benyttes til yderligere at optimere.

Når opstillingen 'kører' laves en måleserie hvor spejlet flyttes bestemte afstande (som måles præcist). Er det nødvendigt at kende afstanden til laseren, eller er det nok at kende flytningen for at finde lysets hastighed? Hvad med kabellængder og forsinkelser i elektronikken?

Benyt evt. et matematik-program på PC'en eller oscilloskopets matematik-funktioner der kan integrere eller differentiere, således at et bestemt punkt på retur-pulsen kan identificeres præcist.

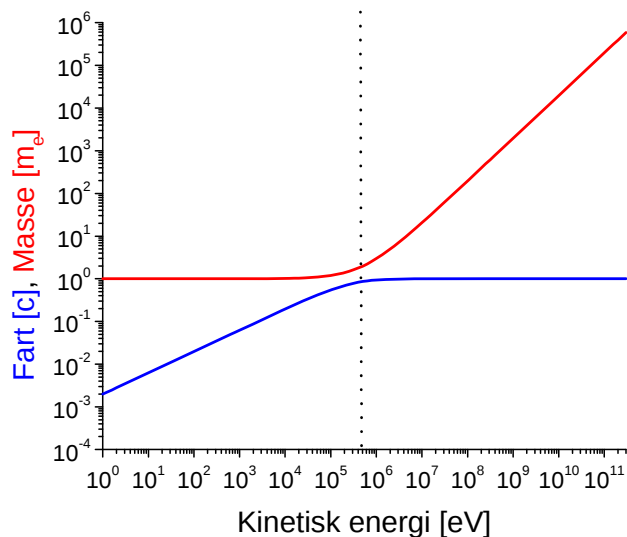
Eventuelt kan man indsætte et stykke plastik eller glas, hvorved hastigheden af lyset ændres til c/n hvor n er brydningsindekset således at n kan måles.



En typisk måling af lysets hastighed med pulseret laser.

Øvelse 4: Elektronens relativistiske masse (udbydes ikke i 2010)

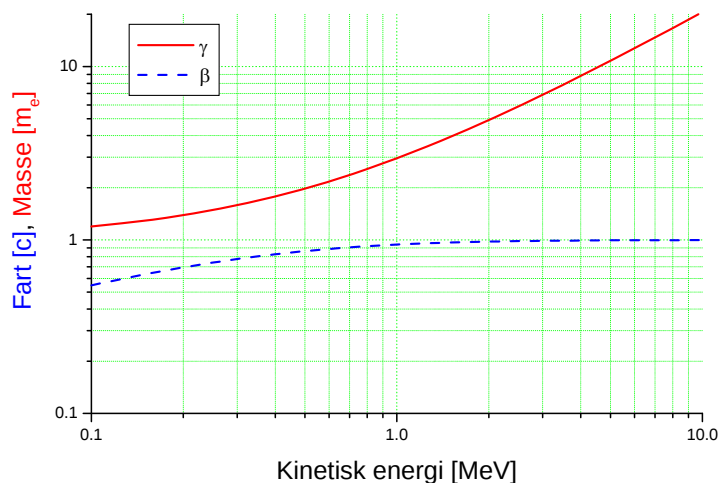
På Aarhus Universitet råder vi over eksperimentelt udstyr som selv veludstyrede amerikanske



laboratorier kan blive misundelige over. Vi har således adgang til ca. 10 accelerators af forskellige typer og med varierende energier. Feks. findes der i kælderen en såkaldt '5 MeV', der kan accelerere partikler til en energi i området op mod 5 MeV, bla. til implantation i faste stoffer og såkaldt 'proton-induceret røntgen stråling' (PIXE) og andre typer undersøgelser. 5 MeV acceleratoren kan også benyttes til at undersøge den relativistiske masseforøgelse. Som det ses af figuren (læg mærke til de

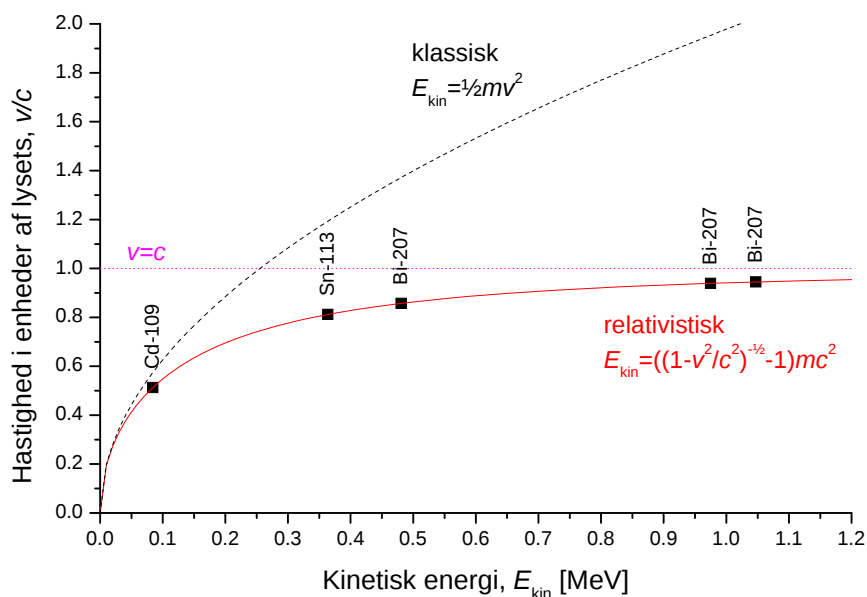
logaritmiske skalaer) bliver farten for en elektron næsten lig med lysets fart når dens kinetiske energi bliver sammenlignelig med dens hvilemasse gange c kvadreret (vist med en lodret stiplede linie). Samtidig bliver dens masse markant større end dens hvilemasse, m_0 . Af

disse grunde opdeles der traditionelt i to områder, det urelativistiske og det relativistiske, henholdsvis under og over kinetiske energier svarende til hvilemassen. Der er principielt ikke noget der er urelativistisk (selv eV elektroner kan påvises at have relativistiske korrektioner), men det er standard 'slang'. I



I figuren er vist et zoom på det område der er interessant i forbindelse med denne øvelse. Heraf ses igen at den i laboratoriet målte masse, dvs. γm_0 , tiltager med omkring en faktor 10 når energien øges fra det urelativistiske område til nogle få MeV. Der er imidlertid en del tekniske komplikationer der gør 5 MeV maskinen uegnet til øvelser. Denne øvelse er derfor baseret på radioaktive kilder, ^{207}Bi

og ^{133}Ba der udsender såkaldte konversions-elektroner (kernens gamma-henfald 'skyder en elektron ud') med forskellige energier op til 1 MeV.



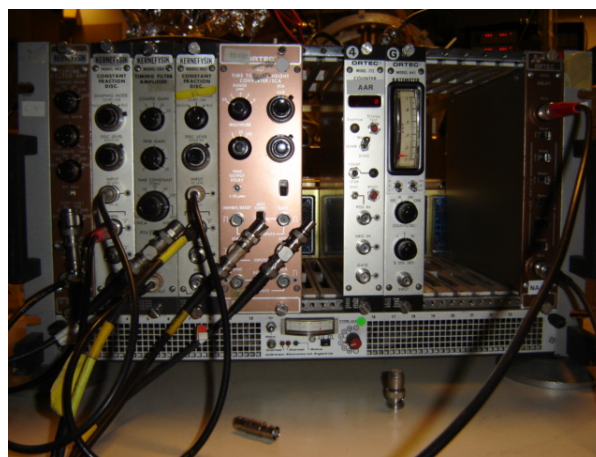
Vi vil her forsøge at eftervise elektronens masseforøgelse ved at indse, at farten går asymptotisk mod c uanset hvor meget energi partiklen besidder. Da højere energi enten betyder højere fart eller højere masse, må energien gå til masseforøgelse hvis ikke

farten ændrer sig. Farten findes ved at måle flyvetiden over en kendt afstand. Denne teknik er standard og kaldes Time-Of-Flight (TOF) metoden. I figuren er vist de forventede resultater fra en simulering for forskellige radioaktive kilder og det ses at der er en markant forskel mellem det klassiske udtryk for farten (i enheder af c) som funktion af energien og det relativistiske.

Time-Of-Flight metoden beror på en nøjagtig måling af elektronens passage af to detektorer – i dette tilfælde scintillatorer S1 og S2 (se øvelse 3 og de sorte rør på billedet). Den første er meget tynd, ca. 10 mikrometer, for at påvirke elektronens energi minimalt, mens den næste er 2 mm tyk og stopper elektronen helt. Først måles flyvetiden for S2 så tæt som muligt på S1 og kilden. Den hermed målte tid inkluderer kabellængder (ca. 1 ns per 20 cm), forsinkelser af signaler i forstærkerne etc. og selvfølgelig elektronens sande flyvetid. Man indsætter dernæst et rør af kendt længde (mål denne) mellem S1 og S2 og ser hvor meget flyvetiden forøges, hvorfra man kan finde farten idet alle andre størrelser end elektronens sande flyvetid er



konstante og 'går ud'. Idet lysets fart er 30 cm/ns og en relativistisk elektron har en fart der er sammenlignelig hermed, fremgår det at selv med en afstand på 3 m opnår man kun flyvetider på godt 10 ns. Passagen af hver detektor skal derfor måles med stor præcision, helst mindre end 1 ns. Dette kan lade sig gøre med en scintillator, en 'timing filter amplifier' (der forstærker og integrerer/differentierer signalet) og en 'constant



fraction discriminator', der uanset pulsdybden vil trigge på samme tid af et givet signal. Med omhyggelig opsætning kan unøjagtigheden bringes ned på 0.3-0.4 ns og præcisionen er dermed omkring 10 cm. Dette gør bla. scintillatoren til et meget benyttet instrument i højenergifysik idet den er robust, pålidelig, billig og temmelig præcis.

Beregn flyvetiden for de forskellige energier givet i tabellen nedenfor og plot resultatet med fart som funktion af energi. Nogle af toppene vil være umulige at skelne fra hinanden – selv med en

Kilde	Energi [keV]	Relativ hyppighed [%]
^{133}Ba	25.5	13.9
^{133}Ba	43.63	3.97
^{133}Ba	45.01	44
^{133}Ba	47.45	1.9
^{133}Ba	75.28	7.4
^{133}Ba	79.78	1.51
^{133}Ba	240.42	0.34
^{133}Ba	266.87	0.68
^{133}Ba	320.03	1.31
^{207}Bi	481	2
^{207}Bi	975	7
^{207}Bi	1047	2

tidsopløsning på 0.3 ns (hvilke?) og nogle er så svage at de ikke kan identificeres. **Vigtigt:** Scintillatorerne skal køre med en spænding på ca. max. -2.1 kV og tåler ikke lys med spænding på. Derfor: **Når I åbner opstillingen, f.eks. for at sætte et rør i, skal spændingen være NUL.**

I selve øvelsen f.eks. Bi-kilden der giver relativistiske

elektroner på omkring 1 MeV. Mål flyvetiden og bestem hermed hastigheden. Tidskalibrering af spektret foretages ved at starte og stoppe med signalet fra den samme scintillator, med 'stop' forsinket gennem 'delay-boksen'. Ved at indsætte forskellige forsinkelser (f.eks. i enheder a 4 ns) opnås toppe der kan benyttes til at finde konverteringen fra kanal-nummer til tid i ns. Når det lange

rør indsættes vil elektronernes flyvetidsfordeling flytte, svarende til den ekstra flyvetid. Da tælleraten er temmelig lav når stop-detektoren er langt væk, opnås typisk 50 tællinger pr. kvarter med det lange rør i. Det er derfor en fordel at vide, at usikkerheden på centroiden af en normalfordeling (som flyvetidsfordelingen ligner) er variansen σ delt med kvadratroden af det totale antal tællinger. Variansen findes ved at bestemme 'full-width-half-maximum' (FWHM), dvs. bredden af toppen der hvor den har halvdelen af sin maksimale højde og derefter benytte: $\sigma = \text{FWHM}/(2 \cdot (2 \ln(2))^{1/2})$.

Plot hastigheden i en figur á la den tredje figur til denne øvelse. Bestem usikkerhederne i målingen og konkludér hvorvidt det klassiske udtryk $E = \frac{1}{2}mv^2$ kan beskrive resultatet og tilsvarende for det relativistiske udtryk (som I selv bør kunne udlede hvis jeres øvelse ligger sent i kurset).

Hvis målingen er en ægte normalfordeling, er sandsynligheden for at få noget der ligger mere end 1σ fra den 'rigtige' værdi (den værdi man ville opnå med uendelig lang tælle tid) 31.7%, mere end 2σ fra den 'rigtige' værdi 4.6% og så videre, se tabellen.

Afstand	Sandsynlighed [%]
1σ	31.7
2σ	4.6
3σ	0.27
4σ	$6.3 \cdot 10^{-3}$
5σ	$5.7 \cdot 10^{-5}$
6σ	$2.0 \cdot 10^{-7}$